УДК 551.515.532.5.18

Канд. техн. наук И.Г. Гуршев [1]

ИЗМЕНЕНИЕ МАССЫ ПЕСКА В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ ВО ВРЕМЯ ПЕСЧАНОЙ БУРИ

Ключевые слова: масса песка, песчаная буря, уравнения

Получено уравнение изменения массы песка в двухфазном потоке во время песчаной бури на основе рассмотрения процесса поступления частиц песка в поток и их выпадения из потока. Решение уравнения даёт функцию для расчета увеличения массы песка в приземном слое атмосферы во времени $M = M_0 \exp[\lambda(t - t_0)]$ *при использовании начальных условий* $t = t_0$, $M = M_0$. *Выполнены числовые оценки временного роста массы песка. Определяется минимальный размер подвижных частиц песка, проникающих в воздушный поток при появлении критической скорости ветра.*

Выявление связей между характеристиками частиц песка и переносимой во время песчаной бури массой песка является важной задачей. Для решения этой задачи необходимо предварительно получить уравнение изменения массы песка в двухфазном потоке. Вывод уравнения будем выполнять для выделенных из общей массы полидисперсного песка частиц с размером x.

Пусть лежащие на песчаной поверхности частицы песка имеют размер x, критическую скорость u_k, а также скорость свободного гравитационного падения w_g. Пусть число таких частиц будет N. Во время песчаной бури, на некоторой высоте над песчаной поверхностью появляется критическая скорость воздушного потока. По порядку величины эта высота составляет 10^{-2} м [4]. Измерения показывают, что значение критической скорости потока имеет порядок u_k ~ 1 м·с$^{-1}$. Согласно исследованиям [2, 4] по достижении ветром критической скорости u_k, лежащие на поверхности частицы песка поступают в воздушный поток. Таким обра-

[1] г. Санкт Петербург, Россия

зом, возникает поток твёрдого вещества, который характеризуется величиной массового расхода.

Одна частица песка во время поступления в воздушный поток переносит вещество через величину площади, равной площади сечения этой частицы. Площадь сечения S частицы пропорциональна квадрату размера x этой частицы, т.е. $S = ax^2$. Здесь a – безразмерный коэффициент. Массовый расход вещества q при переносе его одной частицей равен

$$q = \rho a x^2 u_k, \tag{1}$$

где ρ – плотность вещества частицы песка.

Обозначив квадратными скобками, размерность величины q, получим что равенство (1) имеет размерность массового расхода [5, 6], т.е. $[q] = \dfrac{кг \cdot м^2 \cdot м}{м^3 \cdot с} = \dfrac{кг}{с}$. Плотность вещества ρ определяется как частное от деления массы частицы m на объём частицы V. С другой стороны, объём частицы V связан с её размером x следующим образом $V = ax^3$. Таким образом, массовый расход вещества равен

$$q = \frac{ax^2 u_k m}{ax^3} = \frac{m u_k}{x}. \tag{2}$$

Выражение (2) имеет размерность массового расхода, т.е. $[q] = \dfrac{кг \cdot м}{м \cdot с} = \dfrac{кг}{с}$. Умножая обе части равенства (2) на число частиц N, поступивших в воздушный поток, получим формулу массового расхода вещества q_1 при переносе его N-ым количеством частиц песка

$$q_1 = Nq = \frac{N m u_k}{x} = \frac{M u_k}{x}. \tag{3}$$

Величина $M = Nm$ является массой всех частиц с размером x в двухфазном потоке, т.е. движущейся массой песка M. Выражение (3) также имеет размерность массового расхода. Таким образом, массовый расход песка, поступающего в воздушный поток с песчаной поверхности равен

$$q_1 = \frac{M u_k}{x}. \tag{4}$$

Переносимые воздушным потоком частицы песка будут осаждаться на поверхность на некотором расстоянии от мест их попадания в поток.

Предположим, что масса песка M_1, оставшегося в потоке, пропорциональна массе песка M попавшего в двухфазный поток, т.е. $M_1 = kM$, причём k < 1, безразмерная величина. Тогда масса M_2 выпадающего из потока песка равна $M_2 = M - kM = (1-k)M = nM$. Здесь n < 1 – безразмерный коэффициент пропорциональности.

Массовый расход q_2 выпадающего из потока песка, по аналогии с равенством (4) равен

$$q_2 = \frac{M_2 w_g}{x} = \frac{nMw_g}{x}. \qquad (5)$$

Полученное равенство (5) имеет размерность массового расхода.

Обозначив величину бесконечно малого интервала времени как dt, имеющего размерность времени, получаем, что произведение $q_1 dt$ имеет размерность массы, т.е. $\left[\frac{Mu_k}{x} dt\right] = \frac{кг \cdot м \cdot с}{м \cdot с} = кг$. Произведение $q_2 dt$ также имеет размерность массы.

Таким образом, бесконечно малое изменение массы песка dM в слое движущегося двухфазного потока за бесконечно малый интервал времени dt определяется разностью масс поступающих в поток частиц и выпадающих частиц песка

$$dM = \frac{Mu_k}{x} dt - \frac{nMw_g}{x} dt. \qquad (6)$$

Отметим, что обе части равенства (6) имеют размерность массы. Из формулы (6) получаем такие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dM}{dt} = \frac{M}{x}(u_k - nw_g) && (7а)\\
&\lambda = \frac{u_k - nw_g}{x} && (7б)\\
&\frac{dM}{dt} = \lambda M && (7в)
\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

Решение дифференциального уравнения (7в) при использовании начальных условий $t = t_0$, $M = M_0$ имеет следующий вид:

$$M = M_0 \exp[\lambda(t - t_0)]. \qquad (8)$$

Необходимо отметить, что размерность функции λ равна $[\lambda] = c^{-1}$.

Величины u_k и w_g являются функциями размера частиц песка x. В работе [2, 4] обсуждается равенство следующего вида:

$$u_k = A\sqrt{gx}, \qquad (9)$$

где A ~ 0,1 – безразмерная постоянная, g – ускорение свободного падения, x – размер частиц в мкм. Равенство (9) является экспериментально полученной в лабораторных условиях зависимостью и выполняется для частиц песка с размерами 70...410 мкм. В дальнейших расчетах будем использовать равенство (9).

В лабораторных условиях для скорости свободного падения частиц песка w_g было получено такое эмпирическое уравнение [3, 4, 7]

$$w_g = 6{,}5 \cdot 10^{-2}\sqrt{gx} - 1{,}27, \qquad (10)$$

где g – ускорение свободного падения в м/с, x – размер частиц в мкм.

Равенство (10) выполняется для частиц песка из различный районов Аральского региона с размерами 70…315 мкм [3, 4, 7]. Отметим, что в формуле (10) величины w_g и $6{,}5 \cdot 10^{-2}\sqrt{gx}$ имеют размерность скорости. Согласно работе [6] однородные величины можно складывать и вычитать. Поэтому и число 1,27 также имеет размерность скорости, т.е. 1,27 м·с$^{-1}$.

Таким образом, величина M является функцией времени t и размера частиц x. Из зависимости (8) находим значение переменной x_1, определяющей экстремум функции $M(t, x)$. Для определения экстремума функции M по переменной x, находим выражение для производной и выполняем условие существования экстремума [1], то есть, имеем такое равенство:

$$\frac{dM}{dx} = M_0(t - t_0)\frac{d\lambda}{dx}\exp[\lambda(t - t_0)] = 0. \qquad (11)$$

Так как $M_0 \neq 0$, $t - t_0 \neq 0$, $\exp[\lambda(t - t_o)] \neq 0$, то получаем $\dfrac{d\lambda}{dx} = 0$

.

В развёрнутом виде функция $\lambda(x)$ такова

$$\lambda(x) = A\sqrt{\frac{g}{x}} - n \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{g}{x}} + 1{,}27nx^{-1}. \qquad (12)$$

Из равенства (12) получаем следующие результаты

$$\frac{d\lambda}{dx}=-\frac{A\sqrt{g}}{2\sqrt{x^3}}+\frac{n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{g}}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1{,}27n}{x^2}=0, \qquad (13)$$

$$-\left(A-n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\right)\sqrt{gx}=2n\cdot 1{,}27, \qquad (14)$$

$$\left(A-n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2 gx=4n^2\cdot 1{,}27^2. \qquad (15)$$

Из равенства (15) находим значение переменной x_1, которая определяет экстремальное значение функции M , т.е.

$$x_1=\frac{4n^2 1{,}27^2}{\left(A-n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2 g}. \qquad (16)$$

Размерность величины x_1 равна $\left[x_1\right]=\frac{м^2\cdot с^{-2}}{м\cdot с^{-2}}=м$, так как размерность экспериментальной величины 1,27 равна $м\cdot с^{-1}$. Если допустить $n=0{,}7$, A ~ 0,1, и принять $g\approx 10 м\cdot с^{-2}$, то по формуле (16) вычисляем $x_1\approx 102\ мкм$. Найденное значение размера частицы находится в вышеуказанных пределах. С другой стороны, наиболее подвижными частицами песка, по-видимому, являются частицы с размерами 90…144 мкм [3, 4]. Полученное значение $x_1\approx 102\ мкм$ также находится внутри указанного интервала размеров, что показывает на возможность поступления таких частиц в воздушный поток при появлении в нём критической скорости ветра.

Для определения типа экстремума используем зависимость (8). Находим равенство для второй производной функции M

$$\frac{d^2M}{dx^2}=M_0\left(t-t_0\right)\left[\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2\left(t-t_0\right)\right]\exp\left[\lambda\left(t-t_0\right)\right]. \qquad (17)$$

Из равенства (13) имеем такую формулу для первой производной функции $\lambda(x)$

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}\left(-0{,}5A\sqrt{g}+0{,}5n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{g}-1{,}27n\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \qquad (18)$$

Проведём числовую оценку слагаемых в выражении (18) по порядку величин для точки $x_1=102\ мкм$. Принимая $n=0{,}7$, A ~ 0,1, $g\approx 10\ м\cdot с^{-2}$, получаем такие результаты: $0{,}5A\sqrt{g}\approx -0{,}15$, $0{,}5n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{g}\approx 0{,}07$,

$-1{,}27n\dfrac{1}{\sqrt{x}} \approx -0{,}09$. Сумма слагаемых в формуле (18) равна -0,17. Окончательно получаем следующее значение выражения (18) в точке x_1 равное $\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 \approx \left(\dfrac{-0{,}17}{102^3}\right)^2 \approx 3\cdot 10^{-8} > 0$.

Для второй производной функции $\lambda(x)$ находим такую формулу

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x^5}}\left(\frac{3A\sqrt{g}}{4} - \frac{3n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{g}}{4} + 2{,}54n\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \qquad (19)$$

Выполняем оценку слагаемых в выражении (19) по порядку величин для точки x_1 при условии $n = 0{,}7$, A ~ 0,1, $g \approx 10\ м\cdot c^{-2}$ и получаем такие результаты: $\dfrac{3}{4}A\sqrt{g} \approx 0{,}23$; $-\dfrac{3}{4}n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{g} \approx -0{,}11$; $2{,}54n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} \approx 0{,}18$.

Таким образом, сумма слагаемых в формуле (19) равна 0,3 и является положительным числом. Кроме того, необходимо отметить, что величина $\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$ также является положительной. Значит, в точке $x = x_1$ выполняется такое неравенство $\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} > 0$. Так как $M_0 > 0$, $t - t_0 > 0$, $\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 > 0$, $\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} > 0$, $\exp[\lambda(t-t_0)] > 0$, то из формулы (17) следует, что $\dfrac{d^2M}{dx^2} > 0$.

Таким образом, функция $M(x,t)$ имеет в точке $x = x_1$ минимум [4].

С помощью равенства (16) находим формулу для оценки значения функции $\lambda(x)$ в точке $x = x_1$. Согласно равенствам (9, 10) получаем $u_{k1} = A\sqrt{gx_1}$, $nw_{g1} = n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\sqrt{gx_1} - 1{,}27n$ и определяем формулу для оценки значения $\lambda(x_1)$, т.е.

$$\lambda_1(x_1) = \frac{u_{k1} - nw_{g1}}{x_1} = \frac{3\left(A - n\cdot 6{,}5\cdot 10^{-2}\right)^2 g}{5{,}08n}. \qquad (20)$$

Проведём числовую оценку значения λ_1 по порядку входящих в формулу (20) величин. В случае $n = 0{,}7$, A ~ 0,1, $g \approx 10\ м \cdot c^{-2}$ находим $\lambda_1 \approx 0{,}0027\ c^{-1}$. Согласно формуле (8) получаем зависимость $M_1 = M_{01} \exp[0{,}0027(t - t_0)]$. Приняв $t - t_0 = 600\ c$, получим следующий результат $M_1 = M_{01} \exp[0{,}0027 \cdot 600] = M_{01} \exp 1{,}62 = 5{,}05 M_{01}$. Высокое увеличение первоначальной массы песка в потоке происходит за более длительный интервал времени. При $t - t_0 = 1\ час = 3600\ c$ находим $M_1 = M_{01} \exp[0{,}0027 \cdot 3600] = M_{01} \exp 9{,}7 = 16318 \cdot M_{01}$.

Таким образом, во время песчаной бури происходит значительный рост загрязнения песчаным аэрозолем приземного слоя атмосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
2. Бютнер Э.К. Динамика приповерхностного слоя воздуха. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 158 с.
3. Каипов И.В., Семенов О.Е., Шапов А.П. Песчано-солевые бури в Приаралье // Гидрометеорологические проблемы Приаралья. / Под ред. Г.Н. Чичасова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 276 с.
4. Семёнов О.Е. Введение в экспериментальную метеорологию и климатологию песчаных бурь. – Алматы: ИП Волкова Н.А., 2011. – 580 с.
5. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1988. – 430 с.
6. Чертов А.Г. Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / Справ. пособие – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
7. Шапов А.П. Об определении гидродинамической крупности частиц реального песка // Тр. КазНИИ Госкомгидромета. – 1987. – Вып. 99. – С. 43-46.

Поступила 26.05.2017

Техн. ғылымд. канд. И.Г. Гуршев

ҚҰМДЫ ДАУЫЛ КЕЗІНДЕ АУА АҒЫМЫНДАҒЫ ҚҰМ САЛМАҒЫНЫҢ ӨЗГЕРУІ

Түйінді сөздер: құм салмағы, құмды дауыл, теңдеу

Құмды дауыл кезінде екі фазалық ағымда құм салмағының өзгеру теңдеуі құм бөлшектерінің ағымға түсу және ағымнан шығу процестерін қарастыру негізінде алынды. Теңдеуді шешу жер беті ауа қабатындағы құм салмағының көбеюін $M = M_0 \exp[\lambda(t - t_0)]$ *уақытта, алғашқы шарттарды* $t = t_0$, $M = M_0$, *қолдану арқылы есептеу функциясын береді. Құм салмағы уақыттық өсуінің сандық бағалаулары орындалды. Шекті жел жылдамдығы пайда болғанда ауа ағымына енетін жылжымалы құм бөлшектерінің минималды өлшемі анықталады.*

Gurshev I.G.

CHANGE OF THE SAND MASS IN THE AIR FLOW DURING SANDSTORM

***Keywords**:* mass of sand, sandstorm, equations

The equation of sand mass change in a two-phase flow during a sandstorm is obtained on the basis of consideration of the process of sand particles entering the flow and their precipitation from the stream. The solution of the equation gives a function for calculating the increase in the mass of sand in the surface layer of the atmosphere in time using the initial conditions. Numerical estimates of the temporary increase in the mass of sand are performed. The minimum size of mobile sand particles that penetrate the air flow when the critical wind speed is detected is determined.