Гидрометеорология и экология
N 4 1996

УДК 551.311.21:517.2:511:3

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОРНЕЙ ИЗ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ И УРАВНЕНИЯ ДИОФАНТА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЕЛЕВЫХ ПОТОКОВ

А.М.Ермошкин

Разработан новый метод вычисления корней из целых чисел. Найдено решение двух уравнений Диофанта, одно из которых описывает селевую массу как трехкомпонентную среду. Процесс дробления камней не учитывается.

Развитие многочисленных вычислительных методов в настоящее время позволяет строить математические модели довольно обширных классов. Однако некоторые простые (по начертанию записи, а не по выполнению вычисления или мыслительного акта) математические операции отнимают много времени при их частом использовании. Решение уравнения

$$x = a^{1/n}, \qquad (1)$$

где a и n - целые числа, на первый взгляд, в теоретическом отношении не представляет труда. На практике, когда приходится выполнять серийные расчеты, появляются проблемы. Во-первых, нет достаточного количества таблиц. Есть таблицы квадратных и кубических корней [1] . Есть таблицы для некоторых n в небольшом диапазоне целых чисел от 1 до 1000 [12]. Во-вторых, расчеты можно выполнять на ЭВМ, а это уже требует дополнительного технического оснащения. При текущих расчетах приходится составлять специальные таблицы.

На ЭВМ для решения уравнения (1) широко используется метод Ньютона

$$x_{i+1} = \frac{a + (n-1)\, x_i^{\,n}}{n\, x_i^{\,n-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Но этот метод не позволяет сделать анализ структуры получаемого решения (числа). При извлечении корней часто появляются иррациональные числа [13, 14], свойства которых еще плохо изучены.

Если школьник вычисляет квадратные корни, делая это неосознано и механически, то вычисляя корни на ЭВМ, поступают точно таким же образом. В уравнении (1) используется непростая операция. В математике под простыми операциями понимают двуместные (бинарные) операции. Например, $P = a \times b$ есть операция умножения двух множителей a и b. Произведение трех множителей $P = a \times b \times c$ будет уже трехместной операцией. Произведение n сомножителей $P = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ будет n-местной операцией. Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, то $P = a^n$ или $a = P^{1/n}$, т.е. уравнение (1) есть обратная операция n-местной операции умножения. Обратные операции сами по себе представляют иногда непреодолимые трудности, а здесь еще присутствует сложная n-местная операция умножения. В работах [3,4,5] приводятся формулы:

$$z = (x + 1)^{0,3} \ln x, \qquad (3)$$

$$\beta = A \times \ln \frac{x + ab \times t}{x \times \exp(-xt - a \times b \times t) + b}, \qquad (4)$$

$$V_{cp} = \frac{1}{n} \times h^{2/3} \times i^{1/6}. \qquad (5)$$

Формулы (3), (4), (5) требуют громоздких вычислений по сравнению с (1). В (4) содержится около 5 параметров. По своей структуре (5) является функционально-статистической формулой и ее не следует перегружать параметрами. Они не дадут детального описания какого-либо процесса, кроме ненужных осложнений и не заменят дифференциальных уравнений.

Всякая формула в математике есть абстрактное отображение объективной реальности. Если процесс абстрагирования выполнен правильно, то полученные уравнения будут иметь ценность, хотя еще и не построены методы их решения. Можно записать уравнение (1) в виде:

$$x + y^n = (y + k)^n, \tag{6}$$

т.е. для вычисления корня $y + k$, или

$$y + k = (x + y^n)^{1/n}, \tag{7}$$

подкоренное число разбивается на сумму двух чисел, одно из которых y^n есть максимальная степень, а

$$x < (y + 1)^n - y^n .$$

Тогда очевидно, что $0 < k < 1$ и число $y+k$ будет иррациональным. Здесь необходимо дать понятие иррационального числа, которое будет использоваться в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Всякое число $a^{1/n}$ есть иррациональное, если $N^n < a < (N + 1)^n$, где a, $n \geqslant 2$, N - целые числа.

Из (6) можно получить:

$$k = \frac{1}{ny^{n-1}} [x - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} k^2 - \ldots - k^n]. \tag{8}$$

В формуле (8) k определяется через более высокие степени этого же параметра k. Такие функции называются рекурсивными [6, 9, 10]. Так как $0<k<1$, то за первое приближение для k можно взять

$$k_1 = \frac{x}{ny^{n-1}} . \tag{9}$$

Затем (9) подставить в (8) и методом итераций получить k какой угодно точности. Так, например,

$$2^{1/3} \approx 1{,}25992\ 10498\ 94885\ 77170\ 81547.$$

Ввиду чрезвычайной важности, которую играет понятие симметрии [2] в науке, искусстве и природе, естественно обобщить уравнение (6), записав его в виде:

$$x^n + y^n = (y + k)^n . \qquad (10)$$

Обобщение усложняет уравнение и ставит сложную и трудную проблему его решения. Это своеобразная плата за красоту и элегантность. Пусть

$$\Delta = (y + 1)^n - y^n, \quad \text{если } x^n < \Delta , \qquad (11)$$

то решение (10) эквивалентно решению (6).

$$\text{Если} \quad x^n > \Delta \cdot \qquad (12)$$

тогда (10) можно преобразовать следующим образом:

$$x_1 = x^n - \Delta, \quad y_1 = y + 1, \quad x_1 + y_1^{\,n} = (y_1 + k_1)^n,$$

т.е. y^n увеличивается (восхождение), а x^n уменьшается (спуск).

$$\text{Если} \quad x_1 > \Delta_1 , \quad \Delta_1 = (y_1 + 1)^n - y_1^{\,n}.$$

то это преобразование следует повторить, пока не станет справедливым (11).

Сущность метода заключается в том, что в (10) выделяется целая часть параметра k, а затем вычисляется дробная часть k. Пусть (10) имеет i преобразований, тогда решение можно схематически представить так:

е ↑			
и			
н		С	
е	$0 < k_1 \quad < 1$	п	$0<k_1 \quad <1$
д	$1 < k_{i-1} = ? < 2$	у	$1<k_{i-1} = k_i + 1<2$
ж	$2 < k_{i-2} = ? < 3$	с	$2<k_{i-2} = k_{i-1} + 1_{<3}$
о	....	к	....
х	$i-1 < k_1 = ? < i$		$i-1<k_1 = k_2 + 1 <i$
с	$i < k = ? < i+1$		$i<k = k_1 + 1<i+1.$
о			
В		↓	

После восхождения вычисляется k_1, а при спуске к нему на каждом шаге прибавляется 1.

В процессе решения (10) при выполнении условий (11) и (12) k_1 всегда меньше 1 и является иррациональным числом.

Для полного выяснения свойств структуры решений (10) необходимо рассмотреть условие

$$x^n = \Delta . \tag{13}$$

Из (13) следует, что

$$a = ny^{n-1} < x^n < n\,(y+1)^{n-1} = b . \tag{14}$$

Пусть $L = n\,(y+0,5)^{n-1}$, $R = 0,5\,(a+b)$.

Тогда
$$L < R , \tag{15}$$

так как
$$\Delta - L = 1 - n/2^{n-1} , \tag{16}$$
$$R - \Delta = n/2 - 1 \quad \text{и} \tag{17}$$
$$L < \Delta < R , \tag{18}$$

$$R - L = 0,5\,(1 - 1/2^{n-2}) .$$

Пусть x - какое-то целое число. Если $n = 2$, то $L = \Delta = R=2y+1$ и может быть

$$(x - 1)^2 < \Delta < (x + 1)^2 , \ \Delta = x^2 . \tag{19}$$

Если $n \geqslant 3$, то всегда справедливо (18) и

$$x^n < \Delta < (x + 1)^n , \qquad (20)$$

так как наименьшее расстояние b-a равно n!. Следовательно, величина $\Delta^{1/n}$ по определению есть иррациональное число. Безуспешные попытки решить уравнение (10) отбили всякое желание использовать уравнения Диофанта [7,15] для приложений, кроме простейших типов.

Задача. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5 % и 40 %. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием в 30 % ? Ответ: 40 т 1-го и 100 т 2-го сорта. Получен как решение линейного уравнения Диофанта $ax+by=c$.

Если (10) содержит три параметра и до сих пор почти не использовалось в приложениях, то (4) и подавно не будет привлекать исследователей. Описать селевую массу можно тремя параметрами. Если сель называют грязекаменным потоком, то можно выделить воду, мелкозем (рыхлую породу) и камень, как три составляющие компоненты. Мелкозем состоит из частиц меньше 1 мм. Соотношение этих компонент в виде:

$$y = \frac{am + bn + ck}{m + n + k} \qquad (21)$$

или

$$(a - y)\, m = (y - b)\, n + (y - c)\, k , \qquad (22)$$

и дает описание селевой смеси. Здесь m, n , k - объемы соответственно камня, мелкозема, воды, $a = 2650$ кг/м^3, $b = 2000$ кг/м^3, $c = 1000$ кг/м^3. Выражение (22) есть уравнение Диофанта с 4-мя неизвестными. Можно найти максимальную плотность селевой смеси. Эта простейшая модель селевой массы не учитывает процесс дробления камня на обломки и взаимодействие объемов воды и мелкозема (процесс формирования грязи). Метод решения (21) состоит в разложении селевой смеси на 2-х компонентные смеси: грязь или вода и мелкозем (ВМ), вода-камень (ВК), грунт или камень-мелкозем (КМ). Эти смеси можно представить (изобразить) линейными функциями, которые допускают геометрическую интерпретацию. На рисунке прямая АС есть линия смеси ВК

$$y = a\,(1 - x) + c\,x ,$$

ВС - линия грязи или смеси ВМ

$$y = b\,(1 - x) + c\,x ,$$

АВ - линия грунта или смеси КМ

$$y = (am + bn)/(m + n).$$

Точки R_1, R_2, R_3 есть средние плотности соответственно ВМ, ВК, КМ.

На линии грунта точки определяют плотности смеси, которая не является селевой смесью. Поэтому точку R_3 необходимо отсечь от области текучести. Это достигается с помощью линии мелкозема AS. Точка S берется из условия, что пористость мелкозема равна 0,3. Через точку пересечения прямых AS и R_3R_2, обозначенную буквой К и В проводится линия камня BN. В точке К (0,1226; 2208,5) селевая смесь имеет максимальную плотность с наименьшей влажностью. В точке N (0,194; 2326,6) плотность имеет максимальную величину ρ = 2326,6кг/м^3, но эта водо-каменная смесь не может быть селевой смесью. Область текучести ограничена контуром $SKNR_2CR_1$. Если взять $n = 3$, $k = 1$, $y = 2200$, то из (21) следует $m = 4$. Эти целые числа, при которых $y = 2200$, называются селевыми числами. Как утверждается в [11], реальные селевые смеси могут иметь большие значения плотности.

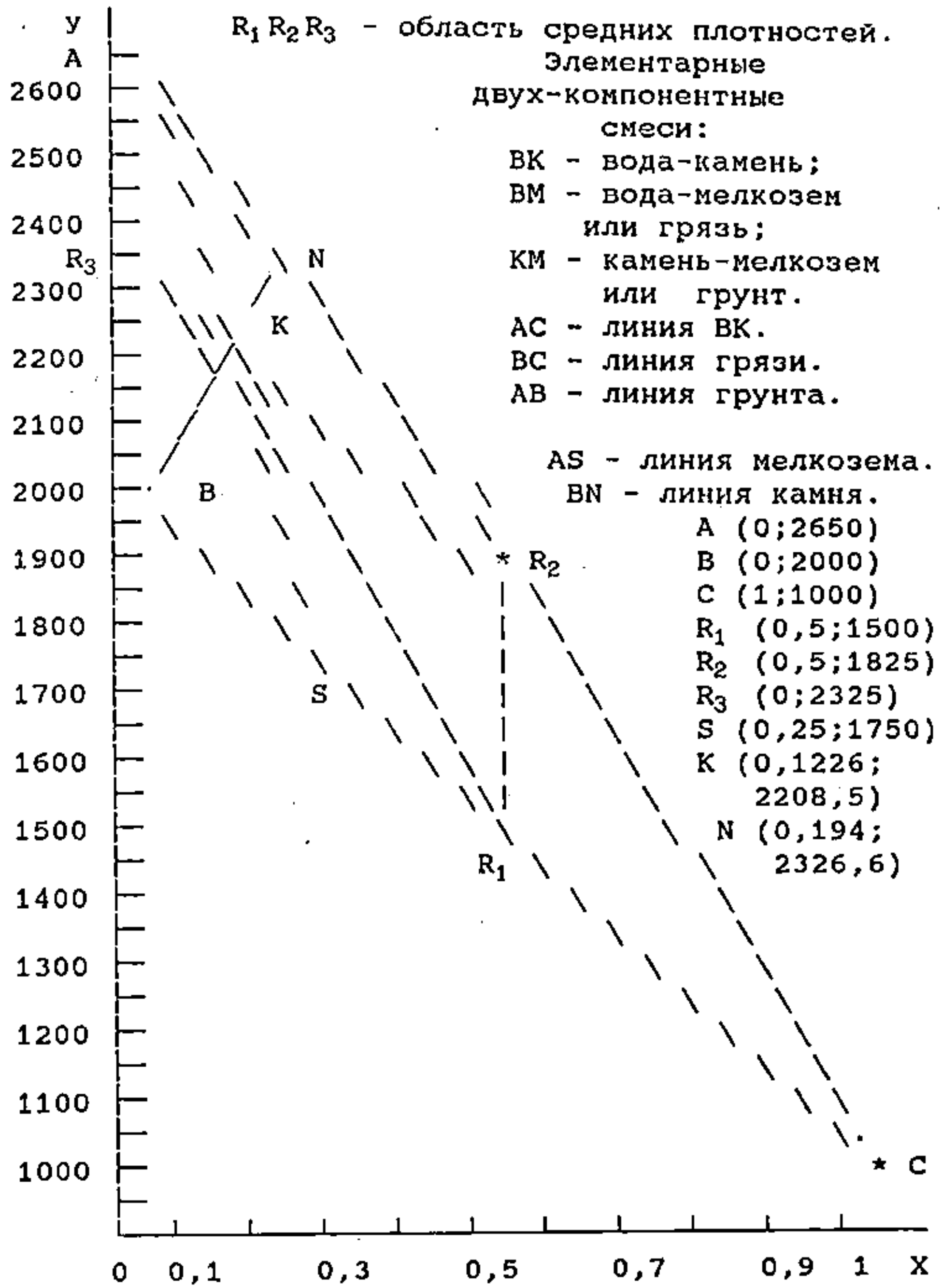

Рис. Диаграмма состояния плотности селевой смеси

На основании трех компонентов селевой смеси можно строить остальные определения характеристик селей, термины и понятия (селевой очаг, вязкость, типы селей и т.д.). Поскольку выше был приведен метод вычисления корней, то уместно напомнить задачи, с которыми связана операция извлечения корней. Среди пяти платоновых тел икосаэдр (двадцатигранник) символически означает воду и связан с решением уравнений пятой степени [8].
Можно эффективно решать алгебраические уравнения

$$x = (- a_1 x^{n-1} - \dots - a_n)^{1/n},$$

но нет подробных таблиц корней. Коэффициент Шези [5], функциональные преобразования [3], многие эмпирические формулы и т.д. связаны с вычислением корней.

Решение уравнений высоких степеней - это уже не математическая операция, а целая теория: теория групп, теория Галуа, теория инвариантов, теория эллиптических функций, современная алгебра и т.д. и вообще вся математика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000. / Под ред. Л.С.Хренова. - М.: Мир, 1975.- 376 с.
2. Вейль Г. Симметрия. - М.: Наука, 1968.-192 с.
3. Виноградов Ю.Б. Математическое моделирование процессов формирования стока. - Л.: Гидрометеоиздат, 1988. - 312 с.
4. Виноградов Ю.Б. Некоторые вопросы формирования селевых потоков и методики их расчета // Тр. КазНИГМИ. - 1968. - Вып. 33. - С. 5 - 29.
5. Голубцов В.В. О гидравлическом сопротивлении и формуле для расчета средней скорости течения горных рек // Тр. КазНИГМИ. - 1968. - Вып. 33. - С. 30 - 41.
6. Гудстейн Р.П. Рекурсивный математический анализ. - М.: Наука, 1970. - 472 с.

7. Диофант Александрийский. Арифметика. - М.: Наука, 1974. - 328 с.
8. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. - М.: Наука, 1989. - 336 с.
9. Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. - М.: Наука, 1973. - 448 с.
10. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972. - 624 с.
11. Степанов Б.С., Степанова Т.С. Механика селей.- М.: Гидрометеоиздат, 1991. - 380 с.
12. Тишин С.Д., Тишин С.С. Таблицы возведения в степень. - М.: Статистика, 1979. - 400 с.
13. Фельдман Н.Н. Седьмая проблема Гильберта. - М.: МГУ, 1982. - 312 с.
14. Шидловский А.В. Трансцендентные числа. - М.: Наука, 1987. - 448 с.
15. Шмидт В.М. Диофантовы приближения. - М.: Мир, 1983. - 228 с.

Казахский научно-исследовательский институт
мониторинга окружающей среды и климата

БҮТІН САННАН ТҮБІР ТАБУ ТУРАЛЫ ЖӘНЕ СЕЛ ТАСҚЫНЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІН ЖАСАУ ҮШІН ДИОФАНТТЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

А.М.Ермошкин

Бүтін саннан түбір табудың жаңа әдісі айқындалды. Диофанттың екі теңдеуінің шешімі табылды, оның біреуі бойынша сел салмағы- үшкомпонентті орта деп сипаттайды. Тасты айдалау процесі ескерілмейді.