

УДК 631.432

УРАВНЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО
ПОТОКА

Канд. техн. наук

Ш.А. Тулегенов

В настоящей работе предложен аналитический вывод зависимости для определения в высокоскоростном потоке воздухоудержания по глубине и его изменения по длине водопроводящего тракта, включая начальный участок.

подавляющее большинство имеющихся в настоящее время исследований высокоскоростных потоков, как равномерного, так и неравномерного, посвящены открытым потокам, причем участкам с развитой аэрацией. Имеются весьма ограниченное количество исследований возникновения и развития аэрации на начальном участке при истечении через водослив, а в закрытых безнапорных водоводах таковые по литературным источникам вообще отсутствуют. Между тем в практике гидротехнического строительства немаловажный интерес представляет аэрация высокоскоростного потока именно на начальном участке, особенно для закрытых безнапорных водоводов. Как показали экспериментальные исследования аэрация потока на начальном участке существенно влияет на характеристики потока ниже по течению.

В настоящей работе предложен аналитический вывод зависимости для определения в высокоскоростном потоке воздухоудержания по глубине и его изменения по длине водопроводящего тракта, включая начальный участок.

Для математического описания аэрированного потока использована модель многоскоростного континуума, представляющего совокупность «N» континуумов, каждая из которых относится к своей составляющей смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Каждая составляющая (в нашем случае вода и воздух) имеет приведенную плотность ρ_i (масса i -й составляющей в единице объема смеси), скорость \bar{V}_i и другие параметры. Исходя из этих величин определяются

параметры, характеризующие смесь в целом, а именно: плотность и

$$\text{среднемассовую скорость } \rho_c = \sum_{i=1}^N \rho_i; \quad \bar{V}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i \bar{V}_i}{\rho_c}$$

В ряде опубликованных работ указанная модель названа моделью дисперсоида. Исходя из вышеизложенного, для водовоздушного потока ограниченного снизу дном водовода, а сверху потоком с концентрацией $S=0,5$, уравнение сохранения массы (неразрывности) имеет вид [1]:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial r} + \text{div}(\rho_g \bar{V}_g) J_g,$$

где здесь и далее индекс «g» относится к параметрам дисперсоида.

J_g – отнесенная к единице объема интенсивность изменения массы дисперсоида.

Для установившегося потока локальное изменение концентрации и в рамках вышеизложенной схематизации интенсивность изменения массы равны нулю. Следуя [1] в уравнение (1) вводится скорость смеси и принятия по закону Фика скорость диффузии, а затем используя прием осреднения по Рейнольдсу получено следующее уравнение турбулентной диффузии:

$$\rho \left[U_x \frac{\partial(1-S)}{\partial x} + U_y \frac{\partial(1-S)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_x \frac{\partial(1-S)}{\partial x} - \rho \overline{U_x^1 S^1} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_y \frac{\partial(1-S)}{\partial y} - \rho \overline{U_y^1 S^1} \right]$$

где -

$\rho_g = \rho(1-S)$ – плотность дисперсоида;

ρ – плотность воды;

S – объемная концентрация воздушной фазы;

D_x – коэффициент молекулярной диффузии;

$\overline{U_x^1 S^1}, \overline{U_y^1 S^1}$ – компоненты вектора турбулентного потока воздушной фазы.

Рассматривая водовоздушный слой с концентрацией не превышающей 0,5 и с учетом соотношения плотностей воды и воздуха $\rho / \rho_g \approx 800$ плотность смеси можно принять равной $\rho_g = \rho(1-S)$, в дальнейшем называемой плотностью дисперсоида. Кроме этого, пользуясь идеей Буссинеска о придании формуле турбулентного трения того же вида, что и ламинарный закон трения Ньютона, турбулентные потоки

воздушной фазы представляем в виде:

$$-\rho \overline{U_x^1 S^1} = \rho D_T \frac{\partial S}{\partial S}; \quad -\rho \overline{U_y^1 S^1} = \rho D_T \frac{\partial S}{\partial S}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$U_x \frac{\partial \rho_g}{\partial x} + U_y \frac{\partial \rho_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \rho_g}{\partial y} \right)$$

где - $D = D_M + D_T$ - суммарный коэффициент диффузии.

Аналитическое решение полученного дифференциального уравнения (3) довольно затруднительно. Однако, в рассматриваемом нами условиях уравнение (3) допускает дальнейшее упрощение. Так как аэрация потока определяется в основном параметрами верхнего динамического слоя высококорыстного потока, где движение близко к потенциальному, можно принять следующее:

$$U_x \approx U; \quad U_y = U_x(H) \frac{\partial H}{\partial X},$$

U - средняя скорость смеси (дисперсоида);

$U_x(H)$ - продольная составляющая скорости смеси на
где - "свободной поверхности";

H - глубина потока смеси.

Левая часть уравнения (3) при этом будет иметь вид:

$$U \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial X} \cdot \frac{\partial \rho_g}{\partial y} \right).$$

Далее принимаем $\partial H / \partial X = 0$, означающее переход к движению потока с постоянной глубиной H . Но переменной по длине водовода плотностью ρ_g , т.е. $\partial \rho_g / \partial x \neq 0$. Указанное допущение для высококорыстного потока возможно при ограничении длины L участка водовода и согласно [2] с достаточной степенью точности выполнимо при $L/H < 10...15$. Для верхнего динамического слоя с учетом того, что число Шмидта $S_c = V/D \approx 1$, по аналогии с коэффициентом турбулентной вязкости принимаем $D \partial^2 \rho_g / \partial y^2$.

С учетом вышеизложенного уравнение (3) записываем в виде;

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial x} \left(U - \frac{\partial D}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial y^2}.$$

Это уравнение приведем к более простому виду, введя вместо независимой переменной «х» новую переменную

$$t = \int_0^x \frac{D}{U - \frac{\partial D}{\partial x}} dx.$$

Тогда уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho_g}{\partial y^2}.$$

Тогда образом исходное уравнение приведено к виду теплопроводности с коэффициентом температуропроводности $\alpha = 1$ и следующих «начальных» и граничных условиях:

$$\rho_g \Big|_{t=0} = \begin{cases} \rho, & \text{при } 0 \leq Y < H; \\ 0,5\rho, & \text{при } Y = H; \end{cases} \quad \frac{\partial \rho_g}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \rho_g \Big|_{y=H} = \frac{1}{2}\rho.$$

Уравнение (6) имеет решение [3]:

$$\frac{\rho_g}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2H} \pi y}{2n+1} \ell - \left[\frac{(2n+1)\pi \sqrt{t}}{2H} \right]^2$$

Анализ полученного выражения, что при $\sqrt{t}/H < 1$ имеющее место в реальных условиях формулу (7) с достаточной степенью точности можно записать в виде:

$$\frac{\rho_g}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{H-Y}{2\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{H+Y}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$\text{где } \operatorname{erf} \frac{H-Y}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{H-Y}{2\sqrt{t}}} \ell^{-\mu^2} d\mu; \quad \operatorname{erf} \frac{H+Y}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{H+Y}{2\sqrt{t}}} \ell^{-\mu^2} d\mu.$$

так называемые интегралы вероятностей [3].

Исходя из свойств функции интеграла вероятностей нетрудно проверить соблюдение начальных условий.

Если $t \rightarrow 0$, то и $x \rightarrow 0$, и при $0 \leq Y < H$

$$\frac{\rho_g}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{+\infty} \ell^{-\mu^2} d\mu + \int_0^{+\infty} \ell^{-\mu^2} d\mu \right] = 1$$

При $Y=H$ (точка разрыва начального распределения плотности) и $t \rightarrow 0$ плотность. $\rho_g / \rho \rightarrow 0,5$.

Проверим граничные условия:

при $Y=H$ первый интеграл (8) равен нулю, а второй при $\sqrt{t/H} < 1$ равен приближенно единице. Действительно, даже если $\sqrt{t/H} = 0,8$ (при котором концентрация воздуха на дне равна 0,4):

$$\frac{\rho_g}{\rho} \Big|_{y=H} \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1,25} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} 0,92 \approx \frac{1}{2}.$$

Наконец, проверим граничное условие при $Y=0$ (условие непроницаемости дна водовода). В результате замены переменной:

$$\xi = \frac{H-Y}{2\sqrt{t}}; \quad x = \frac{H+Y}{2\sqrt{t}}; \quad dy = -2\sqrt{t}d\xi; \quad dy = 2\sqrt{t}dx$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_g}{\rho} \right) \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{H}{2\sqrt{t}}} + \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{H}{2\sqrt{t}}} = 0.$$

Таким образом, решением уравнения (6) является выражение (8), соответствующее начальным и достаточной степенью точности граничным условиям.

С большей степенью приближения, в смысле соблюдения граничных условий, в отличие от формулы (8), выражение (7) можно представить в упрощенном виде:

$$\frac{\rho_g}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{H-Y}{2\sqrt{t}} + 1 \right).$$

Легко проверить, что зависимость (9) так же является решением уравнения (6). Но при строгом выполнении граничного условия на поверхности потока, условие на дне водовода соблюдается только ограниченного диапазона значений.

Действительно, дифференцируя (9) по глубине и после преобразований имеем

$$\frac{\partial(\rho_g/\rho)}{\partial(Y/H)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{t/H}} e^{-\frac{1}{2\sqrt{t/H}}}$$

При $Y=0$, $\sqrt{t/H} = 0,25$

$$\frac{\partial(\rho_g/\rho)}{\partial(Y/H)} = -0,15$$

Отметим, что уравнение концентрации в виде выражения (9), но введенным в него эмпирическим коэффициентом, предложено в работе [4].

В дальнейшем для теоретического анализа и конкретных расчетов параметров азрированного потока в полученных формулах (8,9) было бы полезным иметь вычисленные интегралы. Однако указанное не представляется возможным в элементарных функциях. Интегрирование же

разложение подынтегральной функции в степенной ряд приводит к громоздким формулам, особенно при значении верхнего предела интегрирования большем единицы. Исходя из этого подынтегральная функция была аппроксимирована в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\mu^2} d\mu \approx \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{(1+\mu^2)^2} d\mu.$$

Тогда, например, уравнение (9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\rho_z}{\rho} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{1+h^2} + \operatorname{arctgh} h \right) + \frac{1}{2}$$

$$\text{где } h = \frac{H-y}{2\sqrt{t}}.$$

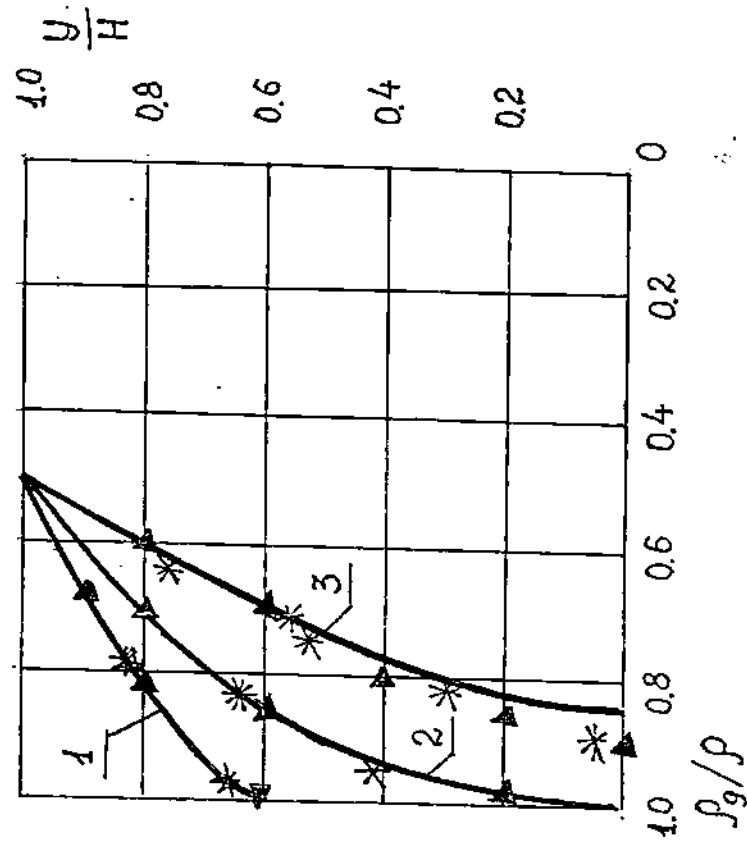
Полученная зависимость (9) не являясь строгим решением уравнения (6) лучше удовлетворяет граничным условиям не дне при соблюдении остальных граничных и начальных условий.

На рис. 1 приведены сопоставления распределений концентрации по глубине приведенным выше формулам и опытными данными. Анализ показывает вполне удовлетворительное соответствие результатов на основе расчетных зависимостей и опытных данных, что свидетельствует о приемлемости схематизации явлений и допущений, принятых в данной работе. Вместе с тем для теоретического анализа и практического использования полученных результатов остается открытым вопрос о величине турбулентной диффузии и ее изменение по длине водовода. Указанное является предметом отдельной публикации автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1978.- С.736
2. Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений. Справочное пособие /Под.ред.Д.Д.Лаппо, А.Б.Векслер, Войнич-Сяноженцкого и др. М.1988.
3. Уравнения математической физики /И.Г.Араманович, В.И.Левие. М.: 1969
4. Высокоскоростные потоки со свободной поверхностью /А.И.Богомолов, В.С.Боровков, Ф.Г.Майрановский. -М., 1979

Тараский государственный университет им. М.Х.Дулати



ЖОҒАРЫ ЖЫЛДАМДЫҚ АҒЫСЫНЫҢ САПАСЫНЫҢ УРАВНЕНИЯСЫ ТЕНДЕУІ

Техн.ғыл.канд.

Ш.А.Тулегенов

Су құбырындағы жоғары жылдамдық ұзындығы мен тереңдігі. Бастапқы жағын қоса алғандағы байланыстылығының аналитикалық қорытындылары ұсынылған.