УДК 556.522

# О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ РЕЧНОЙ СЕТИ ВАХША И НАРЫНА

М.Г.Глазырина

*Исследована структура естественной речной сети крупнейших рек Средней Азии - Нарына и Вахша с позиций теории фрактальности и самоподобия. Показано, что для них справедливы основные эмпирические и теоретические законы строения речных сетей.*

Речная сеть - один из интересных объектов исследований не только с точки зрения географических наук, но и с точки зрения математической статистики. Она является результатом сложного естественного физико-георафического процесса, определяемого величиной и интенсивностью поступления влаги на поверхность суши (климатические факторы), условиями стока этих вод (гидрологические факторы) и сопротивляемостью поверхности суши эрозии (геоморфологические факторы).

Изучением свойств речной сети занимались многие ученые, как в странах СНГ, так и за рубежом [2, 5, 6, 12, 13 и др.]. Мы решили подойти к изучению этих вопросов с точки зрения теории фрактальности и самоподобия. Это сравнительно новое научное направление, однако за рубежом, где ему уделяется много внимания, уже получены результаты, которые без сомнения доказывают необходимость его дальнейшего развития.

Фрактальность и самоподобие напрямую связаны со структурой речной сети. Поэтому возникает необходимость в ее формализации. Среди существующих методов классификации потоков по порядкам (Хортон, Штралер, Шриве, Ржаницын, Карасев) мы выбрали метод Штралера, т.к. он наилучшим образом подходит для решения поставленной задачи.

Прежде чем переходить к исследованию свойств речной сети, связанных с фрактальностью, необходимо сказать кое-что о самом понятии "фрактальность".

Г.И.Баренблатт [1] определил фракталы, как геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие сильно изрезанную форму и обладающие некоторыми специальными свойствами однородности и самоподобия. Такого рода объекты изучались еще математиками конца 19 - начала 20 века. Среди множества необычных объектов, построенных в то время, при пересмотре оснований математики многие оказались фракталами (канторовская пыль, кривая Пеано, снежинка Коха, ковер Серпинского и т.д.). Сам термин "фрактал" (от латинского "fractus" - "дробный", "не целый") и общее понятие фракталов ввел Бенуа Мандельброт [9]. В арсенале современной математики Б.Мандельброт нашел удобную количественную меру неидеальности объектов - извилистости контура, морщинистости поверхности, трещиноватости и пористости объема. Ее предложили два математика - Ф.Хаусдорф и А.С.Безикович.

Одним из самых наглядных примеров необходимости введения фрактальной размерности является попытка измерения длины морского побережья острова Британия, предпринятая известным английским физиком Л.Ф.Ричардсоном [9]. Он выбрал следующий естественный для обычных гладких кривых способ определения этой длины: приблизил линию побережья на детальной карте Британии замкнутой ломаной линией, составленной из отрезков постоянной длины $h$, все вершины которой располагались на побережье. Длина $L_h$ этой ломаной принималась за приближенное значение длины побережья, соответствующее данному значению $h$. Предполагалось, что при уменьшении $h$ соответствующие значения длин аппроксимирующих ломаных $L_h$ будут стремиться к определенному конечному пределу, который следует принять за длину морского побережья. Однако, в отличие от гладкой кривой, линия морского побережья оказалась настолько изрезанной, что с уменьшением длины звена h величина $L_h$ неограниченно возрастала, причем во всем имевшемся диапазоне значений h это возрастание происходило по степенному закону:

$$L_h = \lambda \cdot h^{1-D}, \qquad (1)$$

где $\lambda>0$ и $D>1$ - некоторые постоянные. Для отдельных участков также получались соотношения вида (1) с теми же D, но с другими, меньшими $\lambda$. Как видно, постоянная D безразмерна, постоянная же $\lambda$ имеет причудливую размерность длины в дробной степени D. Формальный переход к пределу при $h \to 0$ в соотношении (1) дает малосодержательный результат: определяемая по предложенному способу длина морского побережья и длина любого его отрезка бесконечны, в то же время, из (1) следует, что отдельные куски побережья можно сравнивать по некоторой мере протяженности, хотя и не по длине, а по соответсвующим им коэффициентам $\lambda$.

Величина $\lambda$, являющаяся мерой протяженности и искривленности предельной непрерывной кривой, для которой справедливо соотношений (1), называется ее мерой Хаусдорфа, а D - фрактальной размерностью [1, 9].

Так же как береговая линия и многие другие природные объекты, речная сеть является фрактальным объектом [8, 9 и др.] со своей мерой Хаусдорфа и фрактальной размерностью, индивидуальными для каждого бассейна (методика вычисления D будет показана ниже).

Речную сеть можно отнести к определенному классу фрактальных объектов (древоподобные объекты), в который наряду с речной сетью входят такие природные объекты как молнии, бронхиальные пути, вегетативная нервная система и т.п.

Рассмотрим класс деревьев, у которых каждый поток порядка w имеет не менее 2 притоков порядка w-1, и $T_{w,k}$ побочных притоков порядка k, где w изменяется от 1 до некоторого W, а k изменяется от 1 до w-1. Числа $T_{w,k}$ могут быть упорядочены в виде квадратной нижнетреугольной матрицы [10]

$$\begin{bmatrix} T_{2,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 & \dots & 0 \\ T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ T_{W,1} & T_{W,2} & T_{W,3} & \dots & T_{W,W-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

и в общем определяют дерево порядка W. Мы будем называть элементы этой матрицы образующими. Топологические самоподобные деревья могут быть определены, как подкласс деревьев с определяющими, которые отвечают условию $T_{W,W-1} = T_k$, где $T_k$ - число, которое зависит от k и не зависит от w и показывает число побочных притоков порядка w-k. В терминах вышеуказанной матрицы, самоподобные - это те деревья, в которых элементы, лежащие на диагонали, остаются постоянными. В теории матриц такие матрицы называются Теплицывыми. Заметим, что в то время, когда более общие деревья определяются W(W-1)/2 параметрами, самоподобные деревья нуждаются только в W-1 параметрах. Эти деревья, с дополнительным условием $T_{k+1}/T_k$ = const для любого k, были впервые рассмотрены Е.Токанагой [14].

Рассмотрим некоторые характеристики свойственные самоподобным деревьям. Обозначим через $N_w$ общее число притоков порядка w в данном дереве. При каждом слиянии двух притоков порядка w должен образовываться поток порядка w+1. Кроме того, потоки порядка w могут быть побочными притоками для потока порядка большего, чем w. Ясно, что $N_w$ должно удовлетворять рекуррентной формуле:

$$N_w = 2 \cdot N_{w+1} + \sum_{k=1}^{W-w} T_k \cdot N_{w+k}. \tag{3}$$

Все деревья включают только один поток высшего порядка, так что $N_W = 1$ и последовательность $\{N_w\}$ полностью определяется последовательностью $\{T_k\}$.

Для естественных речных сетей часто наблюдается быстрое приближение величины $N_w/N_{w+1}$ к константе при изменении w от W до 1. Это было впервые отмечено Р.Хортоном [6]. В литературе о речных сетях эта константа, обозначаемая $R_B$, называется бифуркационным коэффициентом. Если предел $R_B$ существует, то $N_w \sim c \cdot R_B^{W-w}$, где знак эквивалентности обозначает асимптотическое равенство при увеличении W-w.

Рассмотрим другое интересное свойство самоподобных деревьев. Пусть мы имеем деревья порядка w. Эти деревья могут быть поддеревьями в деревьях большего порядка, скажем, W. В самоподобном дереве каждое поддерево порядка w имеет некоторую величину $M_w$. Можно вычислить величину поддерева $M_w$ используя следующее соотношение [10]:

$$M_w = 2 \cdot M_{w-1} + \sum_{k=1}^{w-1} T_k \cdot M_{w-k}, \qquad (4)$$

где $M_1 = 1$. Равенство (4) очень напоминает равенство (3), хотя они получены из разных соображений. Фактически имеет место следующее равенство: $M_{W-w+1} = N_w$. Определим коэффициент

$$R_M = \lim_{w} (M_{w+1}/M_w).$$

Еще одним топологическим свойством будем считать число звеньев в потоке Штралера. Ясно, что число звеньев только на 1 больше, чем общее число побочных притоков. Таким образом, можно записать:

$$C_w = 1 + \sum_{k=1}^{w-1} T_k, \qquad (5)$$

где $C_w$ - число звеньев в штралеровском потоке порядка w. Эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$C_{w+1} = C_w + T_w. \qquad (6)$$

Отсюда определим коэффициент $R_C$ следующим образом:

$$R_C = \{C_{w+1}/C_w\}_{w-}.$$

Как было отмечено ранее, речная сеть является фрактальным объектом. Фрактальная структура обычно характеризуется фрактальной размерностью. Применяя стандартное определение фрактальной размерности К.Фальконе [7] получил:

$$D = \frac{\log(R_B)}{\log(R_C)}. \qquad (8)$$

Используя описанные выше коэффициенты, можно записать хорошо известные эмпирические законы (числа потоков, их длины и площади водосборов) в виде:

$$\begin{aligned} N_w &= K_N \cdot R_B^{W-w}, \\ \langle L_w \rangle &= K_L \cdot R_L^{w-1}, \\ \langle F_w \rangle &= K_F \cdot R_F^{w-1}, \end{aligned} \qquad (9)$$

где символ <> обозначает среднее значение для всех потоков порядка w, $K_N$, $K_L$, $K_F$ - константы, $R_B$ - бифуркационный коэффициент, а $R_L$ и $R_F$ известны, как коэффициенты длины потоков и площадей водосборов. Их значения определяются следующим образом:

$$R_B = N_w/N_{w+1}; \quad R_L = lim(L_{w+1}/L_w)$$
$$\text{и} \quad R_F = lim(F_{w+1}/F_w).$$

Эмпирические законы, соответствующие соотношениям (9), все вместе обычно называются законами Хортона (хотя не все они принадлежат ему), а их ключевые параметры - коэффициентами потоков. Законы Хортона можно рассматривать, как подтверждение фрактальности речной сети.

Кроме законов Хортона широко известен закон Хака [10, 11], связывающий длину реки с площадью ее водосбора:

$$L_H \sim c \cdot F^b ,$$

где $L_H$ - длина главного потока, $b$ - обычно около 0,6 и $c$ - коэффициент, зависящий от единицы измерений. В теории графов длина главного потока называется диаметром дерева. До настоящего времени многие специалисты пытались отыскать величину $b$ (экспонента Хака) и получали в результате число, превосходящее 0,5. Авторы более ранних работ, включая Хака, связывали это с тем, что форма речного бассейна становится более удлиненной с увеличением его площади. Однако в последнее время было показано, что это скорее зависит от изменения извилистости реки. Дискуссии продолжаются. Фальконе [7] показал, что $b=1/D$. Кроме того, им было показано, что фрактальная размерность главного потока принимает значения между 1 и 2 ($1<D<2$).

Приведенные здесь результаты служат теоретической основой анализа естественных речных сетей.

В статистических методах описания речных сетей большую роль играет величина водотока. Поэтому возникла необходимость выбрать самые крупные реки Средней Азии. Самым логичным было бы взять целиком Амударью и Сырдарью. Однако в низовьях эти реки пересекают пустыни, а кроме того, разбираются на орошение, что нарушает статистические закономерности речной сети. В связи с этим мы сочли самым правильным взять лишь крупнейшие притоки этих рек - Вахш и Нарын. Мы воспользовались данными, приведенными в сборниках [3, 4], где представлены данные только по тем рекам, длина которых не менее 10 км. Это существенно уменьшает набор данных и является еще одной причиной выбора для исследований таких крупных рек, как Нарын и Вахш.

Для речной сети взятых нами рек мы составили матрицы вида (2). Для этого каждому потоку был присвоен порядок согласно методике Штралера. Оказалось, что обе главные реки имеют пятый порядок. Как уже было сказано, мы имели возможность учитывать только реки длиной не менее 10 км. Очевидно, если бы были учтены и более короткие водостоки, порядок главных рек оказался бы больше.

Естественно, в природе речные сети не являются самоподобными в строгом смысле, их можно назвать статистически самоподобными. Поэтому $T_{w,k}$ вычисляются, как средние. Таким образом были получены следующие матрицы:

для Нарына -

$$\begin{bmatrix} 1{,}06 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}08 & 1{,}88 & 0 & 0 \\ 11{,}80 & 3{,}00 & 1{,}20 & 0 \\ 44{,}00 & 25{,}00 & 8{,}00 & 3{,}00 \end{bmatrix} \quad (10)$$

и для Вахша -

$$\begin{bmatrix} 0{,}87 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}82 & 0{,}18 & 0 & 0 \\ 21{,}00 & 5{,}33 & 1{,}67 & 0 \\ 19{,}00 & 5{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Видно, что хотя элементы на диагоналях не равны, как это требуется по определению самоподобных деревьев, однако они не сильно различаются, поэтому, используя элементы матриц (10) и (11), мы можем составить следующую таблицу:

Таблица 1

Число притоков порядка w-k к потокам порядка w

| Река | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Нарын | 1,79 | 5,03 | 18,40 | 44,00 |
| Вахш | 0,93 | 2,38 | 13,00 | 19,00 |

Оказалось, что структура речной сети Нарына более или менее удовлетворяет в статистическом смысле условию $T_{k+1}/T_k$ = const для любого k, налагаемому на самоподобные деревья [14], то есть значения указанных отношений различаются, но незначительно. Для Вахша эти различия более заметны, что, по нашему мнению, обусловливается недостаточно большим массивом исходных данных.

Имея значения величин $T_k$, можно рассмотреть некоторые свойства самоподобных деревьев на примере естественных речных систем. Используя формулы (3)-(5), мы получили значения $N_w$, $M_w$ и $C_w$ (см. табл. 2 и 3).

Таблица 2

Число потоков ($N_w$) порядка w, их средняя длина ($L_w$, км), площадь ($F_w$, км$^2$), величина поддерева ($M_w$) и количество звеньев ($C_w$) в бассейне р.Нарын

| w | $N_w$ | $L_w$ | $F_w$ | $M_w$ | $C_w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 192 | 16,5 | 136,6 | 1,0 | 1,0 |
| 2 | 45 | 27,0 | 466,1 | 3,8 | 2,8 |
| 3 | 11 | 44,6 | 1815,5 | 19,4 | 7,8 |
| 4 | 3 | 177,7 | 3190,0 | 110,9 | 26,2 |
| 5 | 1 | 524,0 | 39100,0 | 661,8 | 70,2 |

Таблица 3

То же, что в табл. 2, но для бассейна р.Вахш

| w | $N_w$ | $L_w$ | $F_w$ | $M_w$ | $C_w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 611 | 14,8 | 53,5 | 1,0 | 1,0 |
| 2 | 132 | 28,6 | 294,0 | 2,9 | 1,9 |
| 3 | 24 | 55,6 | 1597,8 | 10,9 | 4,3 |
| 4 | 5 | 141,2 | 5316,0 | 51,5 | 17,3 |
| 5 | 1 | 558,0 | 59900,0 | 234,0 | 36,3 |

Видно, что хотя значения величин $M_w$, $N_w$ и $C_w$ различны для Нарына и Вахша, но при сравнении отношений $N_{w+1}/N_w$, $M_w/M_{w+1}$ и $C_w/C_{w+1}$ для обеих рек можно сказать, что они достаточно близки, с той лишь оговоркой, что все значения для Нарына в среднем больше, чем для Вахша, это объясняется, по нашему мнению, большей "разветвленностью" первого.

Сравнивая значения $N_w$ и $M_w$, мы можем сказать, что условие $N_w = M_{W-w+1}$, которое должно выполняться для самоподобных деревьев, практически выполняется и для наших рек. Кроме того, видно, что $(M_{w+1}/M_w)\cdot(C_w/C_{w+1}) \approx 2$ при $w>1$.

Далее, используя данные из табл. 2 и 3, мы можем найти бифуркационный коэффициент $R_B$, а также коэффициенты $R_M$ и $R_C$ (табл. 4).

Таблица 4

Значения ключевых параметров и фрактальные размерности

| Река | $R_B$ | $R_M$ | $R_C$ | $R_L$ | $R_F$ | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Нарын | 4,98 | 5,08 | 2,93 | 2,56 | 6,17 | 1,49 |
| Вахш | 3,76 | 3,98 | 2,57 | 2,63 | 5,32 | 1,40 |

Как и предполагалось из теоретических соображений, значения коэффициентов $R_B$ и $R_M$ близки для обеих рек и, как видно из табл. 4, примерно в 2 раза больше коэффициента $R_C$. Таким образом, мы убеждаемся, что естественная речная сеть Средней Азии, как и теоретическая, обладает свойствами самоподобия и однородности.

Как уже говорилось, главными статистическими закономерностями естественной речной сети являются законы Хортона и закон Хака. Нашей целью было проверить, выполняются ли они для выбранных рек. На рисунке, построенном в полулогарифмическом масштабе, показаны зависимости $N_w$, $L_w$ и $F_w$ от порядка потоков w. Их аналитические выражения имеют следующий вид:

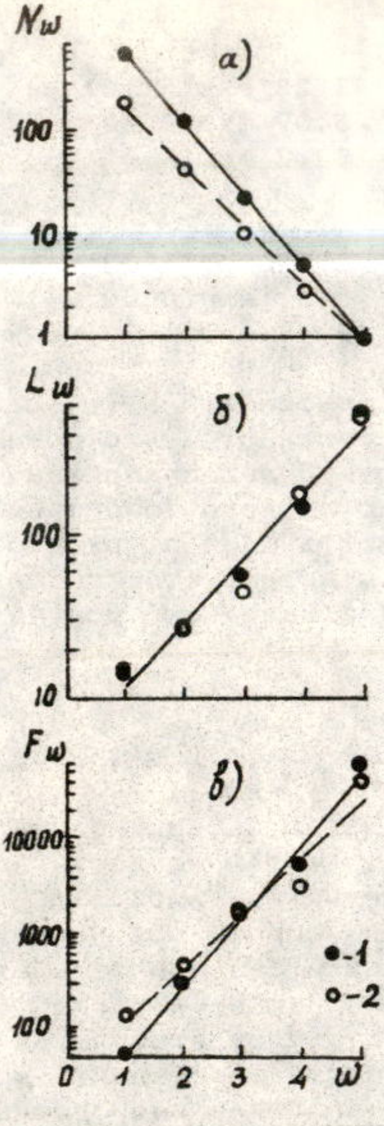


Рис. Зависимости числа потоков (Nw), средней длины потоков (Lw) и средней площади потоков (Fw) от их порядка (w):
1 - р.Вакш; 2 - р. Нарын

для Нарына -

$$N_w = 3128 \cdot \exp(-1{,}61 \cdot w),$$
$$L_w = 5{,}09 \cdot \exp(0{,}88 \cdot w),$$
$$F_w = 32{,}2 \cdot \exp(1{,}32 \cdot w);$$

для Вахша -

$$N_w = 651 \cdot \exp(-1{,}32 \cdot w),$$
$$L_w = 5{,}01 \cdot \exp(0{,}89 \cdot w),$$
$$F_w = 9{,}42 \cdot \exp(1{,}70 \cdot w).$$

Как видим, зависимости $N_w(w)$ и $F_w(w)$ для Нарына и Вахша не совпадают, что можно объяснить, по нашему мнению, большей изрезанностью и молодостью рельефа последнего бассейна. Далее, мы построили зависимость длин потоков от площадей их водосборов с целью посмотреть, соблюдается ли для названных рек закон Хака, и получили следующие уравнения:

для Нарына - $L = 2{,}09 \cdot F^{0.52}$,
для Вахша - $L = 1{,}20 \cdot F^{0.57}$.

Как и предполагалось, мы получили экспоненты Хака большие 0,5, хотя и не достигающие 0,6, как для некоторых крупных рек мира.

И, наконец, на основе полученных данных была рассчитана по формуле (8) фрактальная размерность D для речных сетей Нарына и Вахша. Как видно из табл. 4, результаты удовлетворяют условию, наложенному на размерность фрактальных кривых: $1<D<2$. Следовательно, мы получили еще одно доказательство фрактальности естественных речных сетей Средней Азии.

Итак в работе были проанализированы некоторые свойства речных сетей, проистекающие из их фрактальности для крупнейших рек Средней Азии - Нарына и Вахша. Оказалось, что в основном теоретические закономерности выполняются, и это еще раз подтверждает предположение о фрактальности естественных речных сетей. Мы считаем, что изучение статистических закономерностей структуры речных систем - важное и многообещающее научное направление.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. - Л.: Гидрометеоиздат, 1982. - 256 с.
2. Карасев М.С., Худяков Г.И. Речные системы на примере Дальнего Востока. - М.: Наука, 1984. - 144 с.
3. Ресурсы поверхностных вод СССР. Гидрологическая изученность. Том 14. Бассейны рек Средней Азии. Выпуск 1. Бассейн р. Сыр-Дарьи. - Л.: Гидрометеоиздат, 1965. - 355 с.
4. Ресурсы поверхностных вод СССР. Гидрологическая изученность. Том 14. Бассейны рек Средней Азии. Выпуск 3. Бассейн р. Аму-Дарьи. - Л.: Гидрометеоиздат, 1967. - 323 с.
5. Ржаницын Н.А. Морфологические и гидрологические закономерности строения речной сети. - Л.: Гидрометеоиздат, 1960. - 240 с.
6. Хортон Р.Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. - М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1948. - 158 с.
7. Falconer K. Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications. - New-York: John Wiley, 1990. - 116 p.
8. Inaoka H., and Takayasu H. Water erosion as a fractal growth process // Phys. Rev. Lett. - 1993. - Vol. 47, N 2. - P.899-910.
9. Mandelbrot B.B. Fractals. Form, chance, and dimension. - San Francisco: W.H.Freeman and Co., 1977. - 466 p.
10. Peckham S.D. New results for self-similar trees with applications to river networks // Water Resour. Res. - 1995. - Vol. 31, N 4. - P.1023-1029.

11. Ritter D.F., Kochel R.C., Miller J.R. Process geomorphology. - Chicago: WCB Publishers, 1995. - 546 p.
12. Shreve R.L. Statistical law of stream numbers // J. Geol. - 1966. - Vol. 74. - P.17-37.
13. Strahler A.N. Physical Geography. - New-York: John Wiley & sons Inc., 1975. - 643 p.
14. Tokunaga E. Consideration on the composition of drainage networks and their evolution // Tokio Metrop. Univ. Geogr. Rep. - 1978. - N 13. - P.98-111.

Ташкентский государственный университет им. М.Улугбека

ВАХША МЕН НАРЫН ӨЗЕН ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ СТАТИСТИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ ТУРАЛЫ

М.Г.Глазырина

Орта Азиядағы ірі өзендер Нарын мен Вахша су жүйесінің табиғи құрылымы фрактальді теориясы түрпаты тұрғысында зерттеледі. Оларға негізінен өзен жүйелерінің эмпирикалық және теориялық заңдылықтары тән екендігі ашып көрсетіледі.