Гидрометеорология и экология
№ 1 2000

УДК 532.546:52

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ В ГИДРОТЕХНИКЕ

Канд.физ-мат.наук М.Г. Габбасов
Канд.техн.наук О.К. Карлыханов
Т.Ч. Тажиева
Д.Г. Конюшихин

Приводятся результаты теоретических исследований процессов фильтрации воды через однородную фильтрующую дамбу. Установлены теоретические зависимости расхода нелинейной фильтрации и коэффициентов фильтрации.

Многие практические задачи фильтрации успешно решаются в рамках модели, основанной на законе Дарси /1, 2/. Но в практике известно, что закон Дарси справедлив в ограниченном интервале изменения градиента напора (или скорости фильтрации).

Здесь рассматривается модель фильтрации в теле фильрующей дамбы, основанная на законе Дюпюи - Форхгеймера, который записывается как:

$$-\mathrm{grad}\, H = \alpha \overline{V} + \beta V \overline{V}\,, \tag{1}$$

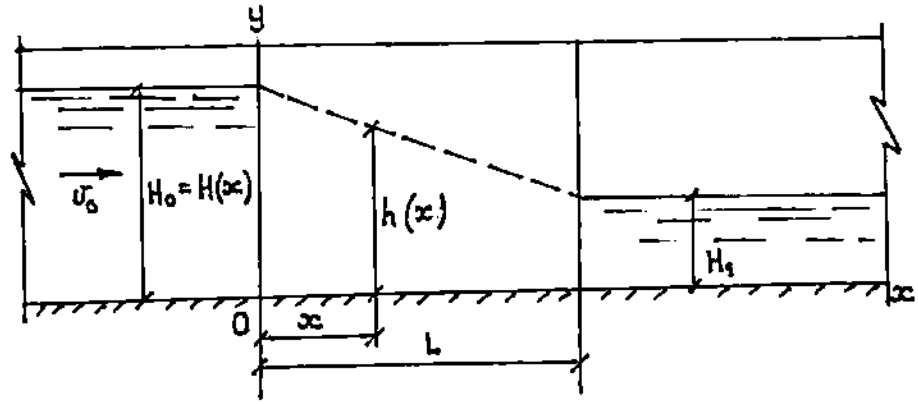
где: V- скорость фильтрации, H - гидростатический напор, grad H - градиент H, α, β - эмпирические коэффициент, $V=\overline{V}$.

Данный закон является прямым обобщением закона Дарси (при β=0) и имеет, естественно, более широкие границы применимости, чем закон Дарси. Обычно при решении практических задач, если это возможно, стараются моделировать процесс фильтрации с помощью закона Дарси, а закон Дюпюи - Форхгеймера или какой-либо другой закон фильтрации рассматривается только в тех случаях, когда по тем или иным причинам закон Дарси становится неправомерным или результаты линейной модели (полученные на основе закона Дарси) плохо согласуются с экспериментом. Это обусловлено, видимо, тем, что математические модели с линейным законом достаточно хорошо разработаны и с их помощью решены важные практические задачи.

Вместе с тем известно, что сам закон Дарси является приближённым (экспериментально установленным) законом и поэтому естественно ожидать, что математические модели фильтрации на основе закона Дарси требуют определённой доработки. В настоящее время с развитием и широким внедрением в народное хозяйство компьютерной техники трудности, связанные с решением краевых задач (математических моделей) фильтрации перестают играть главную роль в выборе соответствующего основного закона фильтрации при составлении математической модели конкретной практической задачи.

Другая сложность в случае выбора закона Дюпюи - Форхгеймера заключается в подборе коэффициентов α и β в соотношении (1), отвечающим конкретным условиям фильтрационного процесса. В случае закона Дарси (при β=0) коэффициент α=1/К, где К - коэффициент фильтрации. Коэффициент фильтрации является наиболее полно изученным, с физической и математическорй точек зрения, показателем процесса фильтрации и его определение (вычисление) в каждом конкретном случае не составляет большого труда. Иное дело, если мы в качестве основного закона фильтрации выбрали закон Дюпюи-Форхгеймера. Здесь единственным, на наш взгляд, критерием определения коэффициентов α и β являются теоретические и экспериментальные (модельные) исследования, в результате которых можно получить приближённую зависимость коэффициентов α и β от напора и расхода дамбы. С этой целью в данной работе моделируется одномерная стационарная фильтрация в теле однородной фильтрующей дамбы (рис.) в направлении оси O_x.

Схема фильтрации



Рисунок

Будем считать, что длина дамбы в направлении фильтрации (оси x) равна L, а ширина дамбы (в направлении оси y, перпендикулярной плоскости чертежа) равна 1. Предполагается, что дамба имеет горизонтальное непроницаемое основание и вертикальные стенки. Пусть вода и тело дамбы несжимаемы, где H_0 - глубина воды в верхнем бьефе. H_1 - глубина воды в нижнем бьефе.

Составим математическую модель данной задачи на основе уравнения (1), считая течение одномерным и стационарным. Тогда областью фильтрации является отрезок [0,L] по оси X с границами X=0 и X=L. Выберем в качестве плоскости сравнения плоскость Oxy, тогда глубина воды h(x) в точке x дамбы совпадает с гидростатическим напором H(x) в(x)∈[0,L].

Напишем уравнение неразрывности для рассматриваемого процесса:

$$Q = \frac{b\alpha}{3} \cdot \frac{H_0^3 - H_1^3}{H_0^2 - H_1^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{(H_0^2 - H_1^2)^2}{H_0^3 - H_1^3} \cdot \frac{3\beta}{L\alpha^2}} - 1}{\beta}$$

$$= \frac{b\alpha(H_0^3 - H_1^3)}{3(H_0^2 - H_1^2)} \cdot \frac{1 + \frac{(H_0^2 - H_1^2)^2}{H_0^3 - H_1^3} \cdot \frac{3\beta}{L\alpha^2} - 1}{\beta(\sqrt{1 + \frac{(H_0^2 - H_1^2)^2}{H_0^3 - H_1^3} \cdot \frac{3\beta}{L\alpha^2}}},$$

где: ρ - плотность жидкости; v(x) - скорость фильтрации в точке; h(x) - глубина водоносного слоя в точке x.

Пользуясь тем, что жидкость несжимаема (ρ=const), h(x)=H(x) и интегрируя последнее уравнение имеем:

$$H(x) \cdot v(x) = \mathrm{const} \quad . \tag{2}$$

В силу определения скорости фильтрации и сделанного выше предположения об единичной ширине дамбы:

$$H(x) \cdot v(x) = Q(x), \tag{3}$$

где Q(x) - расход жидкости в точке x. Следовательно, в силу (2) и (3) имеем:

$$Q(x) = \mathrm{const} = Q$$

и

$$H(x) \cdot v(x) = Q. \tag{4}$$

Подставляя выражение для v(x) из соотношения (4) в закон фильтрации (1) получим:

$$-\frac{dH}{dx}=\alpha\frac{Q}{H}+\beta\frac{Q^2}{H^2} \qquad (5)$$

или

$$\frac{dH(x)}{dx}+\alpha Q\frac{1}{H(x)}+\beta Q^2\frac{1}{H^2(x)}=0, \qquad (5')$$

$$0<x<L.$$

Соотношение (5) есть искомое дифференциальное уравнение, описывающее фильтрацию в теле дамбы. К этому уравнению нужно добавить начальное условие:

$$H(0)=H_0 \qquad (6)$$

на левой границе области фильтрации.

Таким образом, если задан расход фильтрующей дамбы Q, то искомый напор H(x) является решением задач (5) и (6). Иногда вместо расхода задаётся напор на правой границе области фильтрации:

$$H(L)=H_1. \qquad (7)$$

Тогда задача расчёта рассматриваемого безнапорного фильтрационного напора потока равносильна математической задаче определения H(x) и Q из соотношения (5)…(7).

При решении этих задач коэффициенты α и β считаются заданными, при эторм они, естественно, зависят от характеристик пористой среды и жидкости.

Решением задачи (5) и (6) или (5)…(7) называется положительная функция $H(x)>0$, заданная на отрезке [0,L] (и число Q), удовлетворяющая соотношениями (5) и (6) или (5)…(7).

Здесь условие положительности функции H(x) заложено исходя из физической сути задачи, ибо отрицательные значения напора в теле плотины не имеют физического смысла. Также исходя из физики можно сказать, что если коэффициенты α и β определены правильно в соответствии с конкретными условиями рассматриваемой задачи, то на самом деле должно выполняться ещё одно условие:

$$\frac{dH}{dx}\le 0.$$

Вопрос о существовании решения рассмотренных выше задач на всём интервале [0,L] открыт. Известные общие теоремы гарантируют существование и единственность решения в некоторой окрестности точки x=0, пока $H>0$. Длина этой окрестности определяется коэффициентом Липшица правой части уравнения (5), что никак не связано с длиной дамбы L. Если длина дамбы достаточно большая, то решения рассматриваемых задач могут не существовать. Поэтому для корректности задачи коэффициенты α и β должны ещё зависеть от длины L плотины.

Для демонстрации сказанного рассмотрим частный случай задачи (5) и (6), когда β=0 (модель на основе закона Дарси). Тогда полученная задача решается аналитически и её решение имеет вид:

$$H(x) = \sqrt{H_0^2 - 2\alpha Qx}, \quad 0<x<L \tag{8}$$

Как видно из этой формулы при $L > \dfrac{H_0^2}{2\alpha Q}$ положительное решение задачи (5) и (6) не существует. Парадоксальная на первый взгляд зависимость α от длины плотины L становится понятной, если мы найдём α из формулы (8):

$$\alpha = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2Qx} \tag{9}$$

Следовательно, α зависит не от длины L, а от координаты x, что правомерно для неоднородных пористых материалов. А если пористая среда является однородной, то напор H(x) в теле плотины меняется таким образом, чтобы правая часть уравнения (9) оставалась постоянной величиной. Из уравнения (9) также следует, что если длина дамбы достаточно большая, то существование положительного по всей длине плотины решения зависит от начального напора H_0 (чем больше L, тем больше должен быть H_0).

Рассмотрим другой частный случай модели, когда α=0. В этом случае задача (5) и (6) также решается аналитически:

$$H(x) = \sqrt[3]{H_0^3 - 3\beta Q^2 x}, \ 0<x<L. \tag{10}$$

Таким же образом можно решить и другие задачи, связанные с процессом фильтрации. Допустим, у нас есть экспериментальные значения напоров H(x) при нескольких значениях x, а также нам известен (экспериментально) расход фильтрующей дамбы Q. Требуется найти коэффициенты α и β в законе (1), так, чтобы соответствующее решение задачи (5) и (6) наилучшим образом аппроксимировало экспериментальные данные. Выражение "аппроксимировать наилучшим образом" будем понимать в смысле суммы абсолютных отклонений решения от экспериментальных данных в точках, в которых заданы эти данные.

Итак, пусть H_i, $i=0,1,2,3\ldots n$, значения напоров в точках x_i, $i=0,1,2,3\ldots n$, причём, $x_0=0$, $x_n=L$, требуется найти $(\alpha,\beta)\in R^2$ такую, чтобы:

$$F(\alpha,\beta)=\sum_{I=0}^{N}\left|H_I-H(X_I,\alpha,\beta)\right|\to\min, \tag{11}$$

где $H(x,\alpha,\beta)$ - решение задачи (5) и (6) соответствующее значение фиксированным α,β.

Из изложенного выше следует, что не для всех точек $(\alpha,\beta)\in R^2$ решение задачи (5) и (6) существует. Поэтому определим допустимое множество $D\subset R^2$, в точках которого решение (5) и (6) существует.

Будем говорить, что $(\alpha,\beta)\in D\subset R^2$, если решение $H(x,\alpha,\beta)$ задачи (5) и (6) существует. Множество D называется допустимым множеством.

Итак, задача состоит в нахождении $(\alpha_0, \beta_0)\in D$ такую, чтобы $F(\alpha_0, \beta_0)\min F(\alpha, \beta)$.

Для получения $(\alpha, \beta)\in D$ разрешимости (может быть не единственной) поставленной задачи сначала исследуем зависимость $H(x,\alpha,\beta)$ от α и β.

Пусть $(\alpha_1, \beta)\in D$, $(\alpha_2, \beta)\in D$ и $\alpha_1>\alpha_2$. Тогда $H(x, \alpha_1, \beta)\leq H(x, \alpha_2, \beta)$ для всех $x\in[0,L]$.

Для доказательства этого обозначим соответствующие решения через $H_1(x)\equiv H(x,\alpha_1, \beta)$ и $H_2(x)\equiv H(x,\alpha_2, \beta)$. Тогда по определению решения $H_1(x)>0$; $H_2(x)>0$ для любого $x\in[0,L]$ и

$$\frac{dH_1(x)}{dx}+\alpha_1 Q\frac{1}{H_1(x)}+\beta Q^2\frac{1}{H_1^2(x)}=0,$$
$$\frac{dH_2(x)}{dx}+\alpha_2 Q\frac{1}{H_2(x)}+\beta Q^2\frac{1}{H_2^2(x)}=0.$$

Умножим первое уравнение на $H_1^2(x)$, второе - на $H_2^2(x)$, вычтем первое уравнение из второго и после элементарных преобразований получим:

$$\frac{dH^1}{dx}=P(x)\cdot H^1(x)+3QH_1(x)(\alpha_1-\alpha_2), \tag{12}$$

где

$$P(x)=-\frac{3\alpha_2 Q}{H_1^2(x)+H_1(x)\cdot H_2(x)+H_2^2(x)}$$

и в силу начальных условий $H^1(0)=0$.

Тогда решение уравнения (12) даётся формулой:

$$H^1(x) = H_2^3(x) - H_1^3(x) = 3Q(\alpha_1 - \alpha_2)\int_0^x H_1(y)L^{\int_y^x P(z)dz}\, dy > 0$$

для всех x∈[0,L]. Из показанных примеров следует, что если зафиксировать один из параметров α или β, а другой параметр растёт, оставаясь в области D, то соответствующее решение задачи (5) и (6) убывает с ростом отрезка [0,L].

Заметим ещё, что как легко видеть из структуры уравнения (5), если α>0, β>0, то решение задачи (5) и (6) убывает с ростом x, то есть

$$\frac{dH}{dx} \le 0.$$

Иначе говоря, решение H(x,α,β) монотонно зависит от α и β. Тогда зафиксировав один из параметров, например β, и изменяя другой, то есть α, можем найти такое его значение, при котором F(α,β) из (1) достигает своего минимума (естественно такое значение может быть не единственным). Затем, зафиксировав другое значение первого параметра β, найдём соответствующее значение (или значения) α, доставляющее минимум (11). Таким образом, в области D существует некая линия (или множество линий) β=f(α), на которой F(α,β) достигает своего минимума при каждом фиксированном β. Далее минимизируя F(α,β) на этих линиях находим искомое значение (α,β).

Для этого, учитывая сказанное в предыдущем пункте займёмся отысканием ()хотя бы приближённо) линии β=f(α).

Умножим уравнение (5) на H(x) и на H^2(x):

$$H(x)\frac{dH(x)}{dx} + \alpha Q + \beta Q^2 \cdot \frac{1}{H(x)} = 0;$$

$$H^2(x)\frac{dH(x)}{dx} + \alpha Q H(x) + \beta Q^2 = 0,$$

проинтегрируем полученные уравнения по x от нуля до x с учётом (6):

$$H^2(x) - H_0^2 + 2\alpha Q x + 2\beta Q^2 \int_0^x \frac{dx}{H(x)} = 0; \tag{13}$$

$$H^3(x) - H_0^3 + 3\alpha Q\int_0^x H(sx)dx + 3\beta Q^2 x = 0. \tag{14}$$

Заметим, что в силу (4) V(x)=Q/H(x), и тогда из уравнений (13) и (14) получим:

$$\int_0^x V(x)dx = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2\beta Q} - \frac{\alpha}{\beta}x \quad ; \tag{15}$$

$$\int_0^x H(x)dx = \frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha Q} - \frac{\beta Q}{\alpha}x$$

или

$$\frac{1}{x}\int_0^x V(x)dx = \frac{H_0^2 - H^2(x)}{2\beta Qx} - \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \tag{16}$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x H(x)dx = \frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha Qx} - \frac{\beta Q}{\alpha}.$$

В левой части (15) стоит среднее значение $V_{ср}(x)$ скорости фильтрации V(x) на интервале [0,x], а в левой части (16) - среднее значение $H_{ср}(x)$ напора H(x) на [0,x].

Учитывая, что любое $x\in[0,L]$ $H(x)\cdot V(x)=Q$ примем гипотезу:

$$H_{ср}(x)\cdot V_{ср}(x)=Q. \tag{17}$$

Подставляя в (17) выражения $H_{ср}$, $V_{ср}$ из (16) и (17) имеем:

$$\left(\frac{H_0^2 - H^2(x)}{\alpha\beta Qx} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{H_0^3 - H^3(x)}{3\alpha Qx} - \frac{\beta Q}{\alpha}\right) = Q$$

или после элементарных преобразований приходим к равенству:

$$\frac{3Q^2x}{H_0^3 - H^3(x)}\cdot\beta + \frac{2Qx}{H_0^2H^2(x)}\alpha = 1\cdot \tag{18}$$

Таким образом, α и β в задачах (5) и (6) связаны уравнением (18). Это уравнение нужно отметить, приближённое, так как оно получено из гипотезы (17), которая не выполняется точно. Тем не менее в некоторых частных случаях оно выполняется точно.

Теперь, для определения α и β, отвечающих экспериментальным данным достаточно взять любые две данные x_1, x_2, $H(x_1)$, $H(x_2)$, и подставляя их в уравнение (18) получим два уравнения относительно α и β. Рекомендуется в качестве одного из данных взять x_n=L и H_n=H(L), то есть точное решение задачи, конечную точку фильтрации. Здесь и появляется сказанная выше зависимость α и β от L. Тогда формула (18) примет более конкретный вид:

является сказанная выше зависимость α и β от L. Тогда формула (18) примет более конкретный вид:

$$\frac{3Q^2L}{H_0^2 - H_n^3}\beta + \frac{2QL}{H_0^2 - H_n^2}\alpha = 1. \qquad (19)$$

В случае, когда β=0 формула (18) даёт для α формулу (9) или формулу (8) для H(x), то есть точное решение задачи (5), (6). В другом частном случае, когда α=0 из (18) мы получаем формулу (10) для H(x), то есть и в этом случае формула (1) является точной.

В заключение можно отметить, что для равномерной, стационарной нелинейной фильтрации через фильтрующую дамбу приближённая математическая модель записывается в виде:

$$H^2(x)\frac{dH(x)}{dx} + \alpha QH(x) + \frac{H_0^3 - H_1^3}{3L} - \frac{H_0^3 - H_1^3}{H_0^2 - H_1}2\alpha Q = 0, \qquad (20)$$

где: - H(x) - напор в точке x, Q - фильтрационный расход через дамбу на единицу ширины, H_0, H_1 - значения напоров на границе дамбы, L - длина дамбы, α - эмпирический коэффициент.

Как показывают дальнейшие численные решения, если решение задачи (20) существует для любого α из некоторго интервала (0, x_0), то данная модель совпадает с линейной моделью на основе закона Дарси.

Литература

1. Баренблатт Т.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М:Недра, 1972.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы.М:Наука 1978.

Таразский государственный университет им.М.Х.Дулати

ГИДРОТЕХНИКАДАҒЫ СУ ӨТКІЗУ ПРОЦЕССТЕРІНІҢ МӘСЕЛЕЛЕРІ

Физ-мат.ғыл.канд. М.Г.Габбасов
Техн.ғыл.канд. О.К.Карлыханов
Т.Ч.Тажиева
Д.Г.Конюшихин

Біркелкі сүзілу бңгеттері арқалы өтетін су сүзілісі процестерінің теориялық зерттеу нәтижелері келтірілген. Суйықтың сузілу шағымының және сүзілу коэффициенттерінің теориялық байланынстары анықталған.