Гидрометеорология и экология
№ 2 2000

УДК 555.19

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЕЙ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НА БАЗЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ

Канд.физ-мат.наук Б.Б.Бакирбаев
Докт.техн.наук Т.О.Омарбеков
Г.К.Сембина

В работе рассматриваются восстановления полей загрязнения по данным измерений путем решения обратной задачи. В атмосфере для восстановления полей загрязнения используется функционал качества, минимизация которого обеспечивает минимизацию ошибок восстановления. Приводятся различные примеры и оценивается качество восстановления. Обсуждаются некоторые аспекты численного алгоритма.

При решении практических задач охраны окружающей среды всегда стоит проблема задания входных параметров и начальных данных по информации, поступающей в результате измерений. Одной из задач этого направления является диагностика математических моделей и их использование для восстановления пространственно-временной структуры полей по данным измерений [1].

На практике при решении рассматриваемой проблемы, всегда имеется только конечное число измерений, искаженных неизбежными ошибками. Поэтому восстановление структуры полей с использованием лишь данных измерений затруднительно. Для решения данной задачи используются математические модели, с той или иной точностью описывающие реальные процессы. Таким образом возникает вопрос как оценить достоверность результатов моделирования.

Для учета данных измерений и настройки по ним математической модели вводится функционал качества, минимизация которого обеспечивает, с одной стороны, минимизацию ошибок модели, с другой - более точное согласование восстановленных полей с данными измерений. При этом модель выступает в роли пространственно-временного интерполянта. В настоящей статье использован один из способов решения этой задачи.

Для получения численной модели процесса распространения примеси в атмосфере воспользуемся полуэмпирическим уравнением переноса [2]:

$$L\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + div\vec{u}\varphi + \sigma\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} - div_s\mu grad_s\varphi = f(\vec{x},t) \qquad (1)$$

Уравнение (1) будем решать в области:

$$D_t = \{(\vec{x},t) : \vec{x} = (x,y,z)^T \in D = s \times [0,H], 0 \le t \le T$$

с краевыми условиями:

$$l_\varphi \equiv \left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \beta_s\varphi\right)\Big|_{z=0} = \varphi_s; \qquad \nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0; \ \varphi\big|_\Gamma = 0 \qquad (2)$$

Здесь $\varphi(\vec{x},t)$ - концентрация примеси; $\vec{u}$ =(u,v,w) - вектор скорости ветра; u,v,w - его компоненты в направлении координат x,y,z соответственно; $\sigma \ge 0$ - коэффициент химической трансформации примеси; μ,ν - коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентности; $f(\vec{x},t)$ - функция распределения источников примеси внутри области D; φ_s - распределение поверхностных источников примеси; β_s - функция, характеризующая режим взаимодействия примеси с поверхностью; Г - боковая поверхность области D. Индексом S отмечены операторы, действующие в плоскости (x,y).

Для корректности задачи (1)-(2) зададим начальное условие:

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(\vec{x}) \qquad (3)$$

Для минимизации ошибок рассмотрим функционал [3, 4]:

$$I_0(\varphi) = \int_0^T\int_D (\overline{\varphi} - \varphi_m)^2 q \, dD\, dt \qquad , \qquad (4)$$

где: $(\overline{\varphi} - \varphi_m)$ - обеспечивает минимизацию отклонений между измерениями и вычисленными характеристиками функции состояния; q - весовая функция, их выбор зависит от исследователя. Таким образом, восстановление пространственно-временной структуры полей можно свести к задаче минимизации функционала (4) на множестве функции $\overline{\varphi}$, при условии, что $\overline{u}$, φ удовлетворяет уравнению (1), и краевым условиям (2)-(3).

Введем сеточные области:

$$D^h = \{(x_i, y_j, z_k)\}: x_i = (i-1)\Delta x, i = \overline{1,M}, y_j = (j-1)\Delta y, j = \overline{1,N},$$
$$z_k = (k-1)\Delta z,$$
$$k = \overline{1,P}, D_t = D^h \times (t_n : t_n = (n-1)\Delta t, \; n = \overline{1,L});$$
$$\Delta x = \frac{a}{M-1}, \Delta y = \frac{b}{N-1}, \Delta z = \frac{c}{P-1}, \Delta t = \frac{T}{L-1}.$$

Решением этой задачи будут трехмерные поля концентрации φ_n^h в моменты времени $T_n \in [0,T], n = \overline{1,R}$, на сетке D^h, покрывающей область D. Исходными для нее являются данные измерений F, представленные на некоторой нерегулярной сети станций в различные моменты времени.

Разобьем отрезок [0,T] на R частей:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T_n, n = \overline{0, L-1}, T_0 = 0, T_R = T$$

В качестве функционала возьмем сумму:

$$J_0(\varphi) = \sum_{n=0}^{R-1} J_0^{(h)}(\varphi),$$
$$J_0^{(n)}(\varphi) = \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_D (F - C_\varphi)^2 p \, dD \, dt + \varepsilon \int_D (\hat{\varphi} - \varphi(T_k))^2 \, dD \qquad (5)$$

Здесь $\hat{\varphi}_n$- некоторая априорная оценка для функции $\varphi(T_n)$; ε - параметр, представляющий собой достаточно малое число; С - оператор проектирования, переводящий значение функции φ с регулярной системы узлов на нерегулярную, в которой заданы измерения значения функции F.

На каждом отрезке ΔT_n поставим задачу минимизации функционала (5) при условии, что функция φ на этом отрезке удовлетворяет соотношениям (1), (2) в дискретной форме. При этом искомыми параметрами оказываются $\varphi(T_n)$ - начальные условия (3) для задачи (1)-(2).

Второе слагаемое в правой части (5) вводится как «стабилизатор» с параметром ε. Это формально обеспечивает «запас устойчивости» экстремальной задачи даже при недостатке измерений. В случае, когда уравнение (1) нелинейно, это, кроме того, ограничивает поиск локального экстремума некоторой окрестностью в пространстве параметров.

В качестве априорной оценки $\hat{\varphi}_n$ для интервала $[T_n, T_{n+1}]$ может быть прогноз загрязнения, полученный на модели (1), (2), (3), где начальные условия следует брать из решения соответствующей экстремальной задачи на предыдущем отрезке $[T_{n-1}, T_n]$. Для первого отрезка априорная оценка начальных данных может быть выбрана произвольно (ее влияние с течением времени затухает в силу диссипативности оператора L). Процедура получения невязки (F-Cφ) на нерегулярной сети станций включает в себя операцию интерполяции. Здесь может быть применена для интерполяции функции Безье.

Задача идентификации, таким образом, представляет собой процедуру непрерывного слежения за уровнем загрязнения в области с использованием математической модели в качестве пространственно-временного интерполянта. Общая структура алгоритмов для решения этой задачи описана в [2].

Чтобы уменьшить число степеней свободы в дискретных аналогах модели (1), (2), (5) при восстановлении полей по данным измерений, используем спектральное разложение поля начальных значений и представляем решение уравнения (1) в виде линейной регрессионной модели [3, 4]. В силу линейности оператора L рассмотрим пространство функций Q(D), обладающих необходимым числом производных для корректности всех проводимых операций дифференцирования и удовлетворяющих следующим однородным граничным условиям:

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0, \quad \varphi\Big|_{z=0} = 0, \quad \varphi\Big|_{\Gamma} = 0 .$$

Выберем в пространстве Q(D) ортонормированный базис:

$$\{q_n(\bar{x}), n = 1, 2, \ldots\} \qquad (6)$$

Будем предполагать, что искомая функция $\varphi_0(\bar{x})$ является достаточно гладкой. В этом случае при ее разложении по базису (6) вполне достаточно ограничиться небольшим числом K членов ряда:

$$\varphi_0(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{K} \theta_n q_n(\vec{x}), \qquad (7)$$

где $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K)^T$ - неизвестный вектор параметров.

В этом случае решение задачи (1), (2), (7) можно записать в виде:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \phi_0(\vec{x}, t) + \sum_{n=1}^{K} \theta_n \phi_n(\vec{x}, t), \qquad (8)$$

где: $\phi_n(\vec{x}, t) \in Q(D)$, $n = \overline{0,K}$, - решения следующего набора задач:

$$\begin{cases} L\phi_0 = f(\vec{x}, t); \\ l\phi_0\big|_{z=0} = r_x, \quad \phi_0(\vec{x}, 0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L\phi_n = 0, \quad n = \overline{1,K} \\ l\phi_n = 0, \quad \phi_n(\vec{x}, 0) = q_n(\vec{x}) \end{cases}$$

где L, l - некоторые дифференциальные операторы.

Решение этих задач осуществляется с помощью метода конечных элементов со специальным монотонизатором [2, 5].

Пусть измерения F_i проведены в точках $(\vec{x}_i, t_i)$, весовые множители неотрицательны, т.е. $p_i \geq 0$, и нормированы $\sum p_i = 1$, $i = \overline{1,N}$. Планом измерений будем называть набор:

$$\alpha = \left\{(\vec{x}_i, t_i), \ p_i \geq 0, \quad i = \overline{1,N}\right\}. \qquad (9)$$

Тогда функционал (4) запишется в виде следующей суммы:

$$J_0(\vec{\phi}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \Big(F_i - \phi_0(\vec{x}_i, t_i) - \sum_{n=1}^{K} \theta_n \phi_n(\vec{x}_i, t_i)\Big)^2 + \varepsilon \sum_{n=1}^{K} (\overset{0}{\theta}_n - \theta_n)^2, \qquad (10)$$

где $\overset{0}{\theta}_n$ - априорные оценки параметров.

В силу выпуклости и условия минимума функционала (10) имеем:

$$\hat{\vec{\theta}} = (M + \varepsilon E)^{-1}(\bar{Y} + \varepsilon \overset{0}{\vec{\theta}}), \tag{11}$$

где: $M_{kl} = \sum_{i=1}^{N} p_i \phi_k(\bar{x}_i, t_i)\, \phi_l\,(x_i, t_i)$,

$$Y_k = \sum_{i=1}^{N} p_i (F_i - \phi_0(\bar{x}_i, t_i))\, \phi_k\,(\bar{x}_i, t_i), \quad k, l = \overline{1, K}$$

В соотношении прямоугольная матрица M называется информационной [4]. Если план измерений не вырожден, т.е. det M ≠ 0, при $\varepsilon \to 0$ получаются известные м.н.к-оценки [3, 4]: $\hat{\hat{\theta}} = M^{-1}\, Y$.

Следует заметить, что, поскольку данные F_i неизбежно содержат ошибки измерений, точность восстановления параметров существенно зависит от выбора удачного плана измерений. Поэтому задачи идентификации и планирования эксперимента для получения значений F_i тесно взаимосвязаны.

Приведем пример решения задачи восстановления полей загрязнения по данным измерений с использованием вышеизложенного алгоритма.

Для численных экспериментов в качестве области D возьмем единичный квадрат в плоскости (x,y) и временной интервал $\Delta T = [0, 1]$. В этой области рассмотрим численную модель рассеяния примесей:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u}\, grad\varphi - div\mu_x grad\varphi = f(\bar{x}, t) \tag{12}$$

с однородными краевыми условиями $\varphi\,|_{\Gamma} = 0$. Для конкретности шага сеточной области возьмем:

$$\Delta x = \Delta y = 0{,}05;\ \Delta t = 0{,}05 .$$

Данные измерений смоделируем со «случайной» ошибкой $\varphi_u = \varphi_T(1 + \Delta \cdot \xi)$, где φ_T - точное решение, ξ - случайная величина, распределенная по нормальному закону: $M[\xi]=0$; $D[\xi]=1$. M[ ] - математическое ожидание, D[ ] - дисперсия. Значение параметра $\Delta=0{,}1$ соответствует 10-процентному уровню ошибки. Все веса измерений в экспериментах предположим равными между собой. В качестве базиса рассмотрим набор функций:

$$\{q_{kl}(x,y)=2\sin(k\pi x)\sin(l\pi y),\ k=\overline{1,3}\ l=\overline{1,3}.$$

Пример. Пусть в области D расположено 16 пунктов наблюдений, в каждом из которых проводится 5 измерений по времени. Координаты точек плана измерений зададим следующим образом:

$\alpha=\{(x_i, y_j, t_k)$: i, j=4, 8, 12, 16, k=1, 4, 7, 10}, а измерения смоделируем с уровнем относительной ошибки 15%. Результаты оценки параметров по описанной выше процедуре представлены в таблице 1.

Восстановление параметров в этом эксперименте произошло с заметной ошибкой. В то же время соответствие самих полей концентрации вполне удовлетворительно, что видно из рис.1, где представлены изолинии истинного: а) и восстановленного, б) полей концентрации. Это обстоятельство объясняется взаимной компенсацией базисных функций по методу минимальных квадратов.

Значения коэффициентов θ

Истинные	0,33	0,25	0,20	0,17	0,25	0,20	0,17	0,14	0,22	0,17	0,14	0,14
Восстановленные	0,42	0,30	0,23	0,12	0,34	0,18	0,26	0,24	0,23	0,37	0,41	0,30

Анализ результатов данной работы приводит к следующему значению:

1.Применение спектрального разложения и регрессионной модели позволяет удовлетворительно оценить достаточно гладкие поля, используя относительно небольшое число измерений. Такая методика может быть применена в случае, когда истинное поле загрязнений может быть представлено в виде суммы двух полей, одно из которых порождается источниками, местоположение и мощность которых заранее известны. Это поле может быть удовлетворительно восстановлено по математической модели. Второе же представляет собой неизвестную концентрацию, которая и подлежит оцениванию.

2. Размещение сети измерительных станций согласованы с методами планирования экспериментов существенно улучшает оценки искомых параметров.

3. При недостаточном числе пунктов измерений оценка параметров становится возможной за счет многократности измерений и точность, с которой они производятся, должны быть согласованы с числом оцениваемых параметров.

Литература

1. Быков А.В. Усвоение данных измерений в задаче численного моделирования переноса примеси. /В кн. Методы математического моделирования в гидродинамических задачах окружающей среды. - Новосибирск, 1993 стр.87-96.
2. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. - Л.: Гидрометеоиздат,1981
3. Химмельбау В.В. Прикладное нелинейное программирование. - М.:Мир,1975
4. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента - М.: Наука,1989
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. - М.: Мир,1988

Таразский государственный университет им.М.Х.Дулати

АУАДАҒЫ ҚОСПАНЫҢ ТЕҢДЕУІНЕ ЖӘНЕ ӨЛШЕУЛЕРІНЕ СҮЙЕНІП ҚОСПАНЫҢ КАРТАСЫН ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ

Б.Б.Бакирбаев
Техн.ғыл.докт. Т.О.Омарбеков
Г.К.Сембина

Жұмыста өлшеу берілгендері арқылы ластану өрісін анықтау мәселелері кері есепті шешу арқылы қарастырылған. Осы мәселенің атмосферадағы сандық моделін алу үшін ластану қосымшаларына байланысты теңдеулер қарастырылады.

Өрісті қалпына келтіру үшін сапалық функционал қарастырылады. Ол функционал жіберілген қатені азайтады. Бұл жұмыста әртүрлі мысалдар келтіріледі, өрісті қаопына келтірудегі сапасы қарастырылады. Сандық алгоритмдердің кейбір мәселелері сөз болады.