НАУЧНЫЕ СТАТЬИ **Гидрометеорология и экология № 2 2000**

УДК 532.546:52

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ФИЛЬТРУЮЩЕЙ ДАМБЫ

Канд.физ-мат.наук М.Г. Габбасов
Канд.техн.наук О.К. Карлыханов
Т.Ч. Тажиева
Д.Г. Конющихин

Приводятся результаты теоретических исследований процесов фильтрации воды через однородную фильтрующую дамбу. Определны теоретические и эксперментальные зависимости процесса протекания жидкости через однородную фильтрующую дамбу и расхода воды.

В работе /3/ были рассмотрены процессы фильтрации через однородную дамбу в стационарном режиме. Эта работа является логическим продолжением изучения этих процессов, в которых важнейшим показателем является пропускная способность дамбы.

Для определения пропускной способности фильтрующей дамбы рассмотрим одномерную стационарную фильтрацию в теле однородной дамбы. Будем считать, что длина дамбы в направлении фильтрации (оси x) равна L, ширина дамбы (в направлении оси y, перпендикулярной плоскости фильтрации) равна B. Предполагается также, что плотина имеет горизонтальное непроницаемое основание и вертикальные стенки, а вода и пористая среда несжимаемы.

Напишем уравнение неразрывности для рассматриваемого процесса в таком виде:

$$\frac{d}{dx}(\rho \cdot h(x) \cdot V(x) \cdot b) = 0\,, \tag{1}$$

где: ρ - плотность жидкости,

V(x)- скорость фильтрации в точке,

h(x) - глубина водоносного слоя в точке x.

Пользуясь тем, что жидкость несжимаема (ρ=const), (h(x)=H(h)) и интегрируя уравнение имеем:

$$b \cdot H(x) \cdot V(x) = const\,. \qquad (2)$$

В силу определения скорости фильтрации:

$$b \cdot H(x) \cdot V(x) = Q(x)\,, \qquad (3)$$

где Q(x) - расход жидкости в точке x.

Итак, в силу (2) и (3) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} Q(x) = const = Q \\ b \cdot H(x) \cdot V(x) = Q \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение для V(x) из (4) в закон фильтрации –

$$\mathrm{grad}\, H = \alpha \overline{V} + \beta V \overline{V} \quad [1, 2],$$

получим:

$$-\frac{dH}{dx} = \alpha \frac{Q}{bH} + \beta \frac{Q^2}{b^2 H^2}$$

или

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\alpha Q}{bH} + \frac{\beta Q^2}{b^2 H^2} = 0\,,\; 0<x<L \qquad (5)$$

Соотношение (5) есть искомое дифференциальное соотношение, описывающее фильтрацию в теле плотины. К этому уравнению нужно добавить начальное условие:

$$H(0)=H_0 \qquad (6)$$

на левой границе области фильтрации.

Так как нам известен расход, то на самом деле в уравнении (5) две неизвестных: функция H(x) и расход Q. Для определения этих неизвестных к соотношениям (5) и (6) нужно добавить ещё одно дополнительное условие. Этим условием обычно является значение напора на первой границе области фильтрации, то есть:

$$H(L)=H_1\,, \qquad (7)$$

где: H_1 - заданное число.

Таким образом, для определения H(x) и Q мы получим обратную задачу (5)...(7).

Решением полученной задачи называется положительная функция H(X)>0, удовлетворяющая соотношениям (5)...(7).

Здесь условие положительности функции H(x) наложено исходя из физической сущности задачи, ибо относительные значения напора H(x) в теле плотины не имеют физического смысла.

Теория обратных задач математической физики является сравнительно молодой областью математики, которая интенсивно развивается в последние десятилетия. Поэтому аналитическое решение задачи (5)...(7) получено в двух частных случаях, когда $\alpha=0$ или $\beta=0$.

Рассмотрим случай $\beta=0$ (модель на основе закона Дарси). В этом случае уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dH}{dx}+\frac{\alpha Q}{bH}=0, \qquad 0<x<L.$$

Разделяя переменные, получим:

$$HdH=-\frac{\alpha Q}{b}dx$$

или интегрируя последнее:

$$\frac{H^2}{2}=-\frac{\alpha Q}{b}x+C.$$

В силу (6):

$$\frac{H_0^2}{2}=C,$$

следовательно:

$$H_0^2-H^2(x)=\frac{L\alpha Q}{b}x.$$

Используя условие (7), находим:

$$Q=b\cdot\frac{H_0^2-H_1^2}{2\alpha L}. \tag{8}$$

В случаях, когда $\alpha=0$, совершенно аналогично получим:

$$Q=b\cdot\frac{\sqrt{H_0^3-H_1^3}}{\sqrt{3\beta L}}. \tag{9}$$

Хотя в общем случае трудно найти точное решение задачи, попытаемся найти приближённое значение расхода Q, исходя их некоторой "естественной" гипотезы.

Для этого умножим уравнение (5) на H(x) и $H^2(x)$:

$$H(x)\frac{dH(x)}{dx}+\frac{\alpha Q}{b}+\frac{\beta Q^2}{b^2H(x)}=0;$$

$$H^2(x)\frac{dH(x)}{dx}+\frac{\alpha Q}{b}H(x)+\frac{\beta Q^2}{b^2}=0,$$

проинтегрируем полученные уравнения по x от 0 до L с учётом(6) и (7):

$$H_0^2-H_1^2=\frac{2\alpha QL}{b}+\frac{2\beta Q^2}{b^2}\int_0^L\frac{dx}{H(x)}; \qquad (10)$$

$$H_0^3-H_1^3=\frac{3\alpha Q}{b}\int_0^L U(x)dx+\frac{3\beta Q^2L}{b^2}. \qquad (11)$$

Заметим, что в силу (4)

$$V(x)=\frac{Q}{bH(x)}$$

и тогда из (10) получим:

$$\frac{1}{L}\int_0^L V(x)dx=\frac{b}{2\beta QL}(H_0^2-H_1^2)-\frac{\alpha}{\beta} \qquad (12)$$

из соотношения (31):

$$\frac{1}{L}\int_0^L H(x)dx=\frac{b}{3\alpha QL}(H_0^3-H_1^3)-\frac{\beta Q}{\alpha b} \qquad (13)$$

В левой части (12) стоит среднее значение $V_{ср}$ скорости фильтрации V(x) по всей плотине, а в левой (13) - среднее значение $H_{ср}$ напора H(x). Учитывая, что в силу (4),для любого xH(x)-V(x)=Q/b примем, что:

$$H_{ср}\cdot V_{ср}=\frac{Q}{b}, \qquad (14)$$

подставляя в (4) выражение $V_{ср}$ и $H_{ср}$ из (12) имеем:

$$\left(\frac{b(H_0^2-H_1^2)}{2\beta QL}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(\frac{b(H_0^3-H_1^3)}{3\alpha QL}-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{Q}{b}\right)=\frac{Q}{b}.$$

Отсюда после элементарных преобразований приходим к равенству:

$$\frac{3\beta LQ^2}{(H_0^3-H_1^3)b^2}+\frac{2\alpha QL}{(H_0^2-H_1^2)b}=1 \qquad (15)$$

Решая уравнение (15) относительно Q, находим искомую формулу для Q:

$$Q=\frac{b}{3}\cdot\frac{H_0^3-H_1^3}{H_0^2-H_1^2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left[\sqrt{1+3\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{\beta}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{L}}-1\right]\cdot \tag{16}$$

Эта формула получена в предположении истинности допущения (14), поэтому найденный по формуле (16) расход Q не является точным решением условий (5)...(7), то есть формула (16) является приближённой. Но тем не менее в некоторых случаях она является точной, а именно в тех случаях, когда либо α=0, либо β=0.

Действительно, полагая в (16) α=0, получим:

$$Q=\frac{b}{3}\cdot\frac{H_0^3-H_1^3}{H_0^2-H_1^2}\cdot\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{3\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{\beta}{L}}+0\right]=b\cdot\sqrt{\frac{H_0^3-H_1^3}{3\beta L}},$$

что совпадает с формулой (9), то есть с точным решением задачи (5)...(7).

Рассмотрим случай β=0. Для этого несколько преобразуем формулу (16):

$$Q=\frac{b\alpha}{3}\cdot\frac{H_0^3-H_1^3}{H_0^2-H_1^2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{3\beta}{L\alpha^2}}-1}{\beta}=$$

$$=\frac{b\alpha(H_0^3-H_1^3)}{3(H_0^2-H_1^2)}\cdot\frac{1+\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{3\beta}{L\alpha^2}-1}{\beta\left(\sqrt{1+\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{3\beta}{L\alpha^2}}\right.}=$$

$$=\frac{b\cdot\frac{H_0^2-H_1^2}{L\alpha}}{\sqrt{1+\frac{(H_0^2-H_1^2)^2}{H_0^3-H_1^3}\cdot\frac{3\beta}{L\alpha^2}}+1}.$$

Полагая здесь β=0, имеем:

$$Q=b\cdot\frac{H_0^2-H_1^2}{2\alpha L}.$$

Мы получим формулу (8), что является точным решением нашей задачи.

Вывод:

Получена зависимость фильтрационного расхода Q от перепада напоров H_0-H_1, длины плотины L, ширины плотины b, коэффициентов α и β в виде формулы (16). Она практически точно совпадает с результатами эксперимента, а в случаях, когда $\alpha=0$ или $\beta=0$ (закон Дарси) является точным решением соответствующей математической модели (5)...(6).

Литература

1. Баренблатт Т.И., Емцов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М: Недра, 1972.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М: Наука 1978.
3. Габбасов М.Г., Карлыханов О.К., Тажиева Т.Ч., Конюшихин Д.Г. Исследование процессов фильтрации в гидротехнике // Гидрометеорология и экология. №1. 2000.

Таразский государственный университет им.М.Х.Дулати

СҮЗГІШ БӨГЕТТІҢ ӨТКІЗУ МҮМКІНШІЛІКТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Физ-мат.ғыл.канд. М.Г.Ғаббасов
Техн.ғыл.канд. О.Қ.Қарлыханов
Т.Ч.Тажиева
Д.Г.Конюшихин

Сүзгіш бөгеттің өткізгіш мүмкіншіліктерін анықтаудың теориялық зерттеу нәтижелері келтірілген. Сұйықтың біркелкі сүзгіш бөгеттен ағылып өту процестері және су шығынының су қоймасы құрылымының өлшемдеріне теориялық және тәжірибелік байланыстары анықталған.