

УДК 551

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВОГО ЗАНОСА  
ВЫЕМОК КАНАЛОВ**

Канд. техн. наук С.М. Койбаков

*Дается математическая модель ветрового заноса открытых русел каналов продуктами дефляции почв и снегопереноса, позволяющих с помощью численных экспериментов прогнозировать аэродинамическую обтекаемость выемок.*

На значительной территории Казахстана наблюдаются частые и сильные ветры. Зимой они вызывают снежные метели, а летом – дефляцию почв. Русла открытых водопроводящих каналов различного назначения, эксплуатируемых в таких условиях, подвергаются в той или иной степени заносу продуктами переноса: зимой — снегом, летом – грунтом. Заносы в руслах резко снижают пропускную способность каналов, вплоть до полной их остановки, вызывая аварийную ситуацию, с вытекающими отсюда последствиями.

В результате многолетних натурных исследований на действующих гидротехнических и гидромелиоративных объектах и лабораторных экспериментов установлены основные закономерности формирования заносов на каналах и факторы, влияющие на заносимость. Учитывая сложность проведения натурных исследований и ограниченные возможности лабораторного исследования, нашей задачей является - создание математической модели и методов математического моделирования.

**Физическая постановка задачи**

Перейдем к изложению физической постановки двумерной нестационарной модели заносимости каналов снежным материалом или продуктами дефляции почв с помощью ветровых течений.

Так как описываемые процессы ограничены в основном приземно-пограничном слое, обратимся к системе уравнений Рейнольдса турбулентной атмосферы [1, 5] и приведем ее к виду, наиболее удобному для решения задач интересующего нас класса.

В качестве исходных параметров примем следующие уравнения:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + A_u u, \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \lambda T' + \Delta_w w = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dT'}{dt} + Sw = \Delta_T T', \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \bar{u} = 0, \quad (4)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $\Delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} \mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_\alpha \frac{\partial}{\partial z}$  - члены, описывающие турбулентный обмен по горизонтальному и вертикальному направлениям;  $\alpha = (u, w, T')$ ;  $t$  - время;  $\mu_\alpha$  и  $\nu_\alpha$  - горизонтальные и вертикальные коэффициенты турбулентности, для количества движения;  $u, w$  компоненты вектора скорости потоков в направлениях осей  $x, z$ ;  $T'$  - отклонения температуры воздуха от фонового;  $P$  - давление воздуха;  $\rho$  - плотность атмосферы;  $S = \gamma_a - \bar{\gamma}$  - температурная стратификация атмосферы;  $\gamma_a$  - адиабатический градиент температуры;  $\bar{\gamma}$  - средний фоновый градиент температуры;  $g$  - ускорение свободного падения;  $\lambda = \frac{g}{T_{cp}}$  - параметр конвекции;  $\text{div}$  - оператор дивергенции.

Выражения (1) и (2) представляют уравнения движения компоненты вектора скорости соответственно по направлениям  $x$  и  $z$  и уравнение (4) неразрывности. Соотношение (3) представляет собой уравнения переноса и диффузии температуры. Для замыкания системы (1) - (4) относительно вертикального коэффициента турбулентного обмена, примем относительно простое замыкание, основанное на полуэмпирической гипотезе, которая имеет вид [11]:

$$\nu_\alpha = \begin{cases} l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot (1 + 3Ri) & \text{для } Ri < 0, \\ l^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot (1 - 3Ri)^{-1} & \text{для } Ri > 0 \end{cases} \quad (5)$$

В представлении (5)  $l$  - это путь смещения (масштаб турбулентности) определяемый равенством:

$$l = \frac{\chi(z + z_0)}{1 + \chi(z + z_0)/q}, \text{ причем } q = 0,00027 u_g f^{-1}; Ri = \lambda \frac{\partial T''/\partial z}{(\partial u/\partial z)^2},$$

где  $u_g$  - геострофический ветер,  $f$  - параметр Кориолиса;  $\chi$  - постоянная Кармана (0,35 - 0,40); горизонтальные коэффициенты турбулентности  $\mu_{ax}$  предполагаются постоянными.

Вследствие того, что градиенты скорости ветра и температуры в пределах нижнего слоя (до 15м) велики, при конечно-разностной аппроксимации производной в формуле (5) могут возникать большие ошибки. Поэтому, для вычисления сдвигом скорости, в пределах низших слоев атмосферы использовались соотношения теории подобия Монина-Обухова [1, 7, 9]. Согласно этой теории масштабы скорости и длины определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u_*^2 &= \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=h} \\ L &= -\frac{u_*^3}{\chi^2 \nu \lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где  $h$  - высота флюгера.

Если  $L < 0$  то  $Ri \approx \xi = \frac{z}{L}$  и градиент потока скорости равен:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,74 [1 - 9(\xi - \xi_0)]^{1/2} \frac{u}{\chi(z + z_0)},$$

где  $\xi_0 = \frac{z_0}{L}$ ,  $\lambda = \frac{g}{T_{cp}}$

Параметр шероховатости можно определить по формулам [9, 10]:

$$\ln z_0 = \frac{u_2 \ln z_1 - u_1 \ln z_2}{u_2 - u_1}, \quad z_0 = 2 \cdot 10^{-4} \left( \frac{u_*^2}{g \cdot x_0} \right)^2.$$

В этой формуле цифры 1 и 2 относятся к величинам, измеренным на одном и на другом уровне соответственно.  $x_0$  - средний геометрический размер песка. Для других субстанций существуют иные формулы, которые определяются экспериментальными путями.

В зависимости от природы седиментирующих в канале субстанций и составе в общем случае достаточно разнообразны и они одновременно могут содержать до нескольких десятков различных пылевых и сыпучих компонентов. Исходя из этих соображений следуя [2, 3] будем строить модель заноса каналов ветровым переносом снега и фракции сыпучих сред. Положим, что примесь состоит из  $n$  компонентов, и обозначим через

$\vec{C} = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$  объемные концентрации заносимых веществ. Например, для сухого снега достаточно брать  $C_1$ , т.е. одну компоненту вектора  $\vec{C}$ . Тогда за основу модели ветрового течения можно брать следующую систему уравнений [5, 9]:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{C}}{\partial x} + (w - \bar{w}_g) \cdot \frac{\partial \vec{C}}{\partial z} + \alpha \vec{C} = \Delta_c \vec{C}, \quad (7)$$

$$\Delta_c \vec{C} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_c \frac{\partial \vec{C}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_c \frac{\partial \vec{C}}{\partial z},$$

где  $\mu_c$ ,  $\nu_c$  – горизонтальные и вертикальные коэффициенты турбулентной диффузии;  $\bar{w}_g = \text{diag}\{w_{gi}\}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – диагональная матрица, элементы которой равны скоростям седиментации соответствующих субстанций. Скорость седиментации можно определить по следующей формуле [7].

$$w_g = \frac{2g\rho}{\nu} \cdot R_i^2; \quad w_{gi} = 10^6 \cdot \rho \cdot \left( \frac{0,787}{R_i} + \frac{503}{\sqrt{R_i}} \right)^{-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad (8)$$

где  $\nu$  – коэффициент молекулярной вязкости;  $g$  – гравитационное ускорение;  $R_i$  – радиус частицы (мкм). В качестве начальных условий положим

$$\vec{C} = \vec{C}_0(\vec{x}) \text{ при } t = 0, \quad (9)$$

где  $\vec{C}_0$  – заданная функция.

Выберем для общего случая краевые условия для концентрации веществ:

$$\vec{C}_0(\vec{x}) = 0 \text{ при } z = H, \quad (10)$$

где  $H$  – высота приземного слоя.

На границах могут быть выбраны следующие краевые условия:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } \frac{\partial \vec{C}}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l \quad (11)$$

На границе с подстилающей поверхностью запишем уравнение баланса для каждого компонента субстанции:

$$\nu_c \frac{\partial \vec{C}}{\partial n} + \bar{W}_g \vec{C} \sin \alpha = \beta \vec{C}, \quad (12)$$

где  $\nu_c$  – коэффициент турбулентной диффузии на уровне шероховатости  $z_0$ ;  $\alpha$  – угол наклона поверхности к горизонтальной плоскости;

$\beta_i \left( i = \overline{1, n} \right)$  – коэффициент захвата поверхностью ( $0 \leq \beta \leq 1$ ); Нетрудно

видеть, что условия  $\beta_i = 0$  соответствует отражению субстанции от поверхности земли, и  $0 < \beta < \infty$  – промежуточные ситуации частичного отражения и поглощения.

При задании коэффициентов турбулентной диффузии субстанции будем полагать, что они пропорциональны коэффициентам турбулентного трения и при расчетах иногда будем замыкать уравнения (6) простейшими формулами, типа градиентной аппроксимации [5, 11].

Для гидродинамических уравнений (1) – (5) рассмотрим в общем случае следующие краевые условия:

В начальный момент атмосфера покоится, т.е. возмущения отсутствуют

$$u(x, z, t) = 0, \quad w(x, z, t) = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (13)$$

На нижней границе области  $z = z_0$  из физических соображений для скоростей ставим условия прилипания т.е.

$$u(x, z, t) = 0, \quad w(x, z, t) = 0, \quad T(x, t) = \Omega \sin \omega t \quad \text{при} \quad z = z_0 \quad (14)$$

Верхней границей области примем ( $z = H$ ).

$$u(x, z, t) = u(x, t), \quad w(x, z, t) = w(x, t) \quad \text{при} \quad z = H. \quad (15)$$

И на боковых границах ставятся следующие условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (16)$$

$$u(x, z, t) = f(z, t), \quad w(x, z, t) = \varphi(z, t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad (17)$$

где  $f(z, t)$ ,  $\varphi(z, t)$  – заданные функции,  $\omega$  - период вращения земли.

В конкретных задачах краевые условия (16) – (17) имеют другой вид.

Пусть имеется канал с поперечным сечением, как показано на рисунке. Выпишем нижнее краевое условие для этого случая. Для системы уравнений гидродинамики (1) – (7) это условие на ломанной ABCDEF имеет вид:

$$u|_{ABCDEF} = 0, \quad w|_{ABCDEF} = 0. \quad (18)$$

$$T|_{ABCDEF} = A \sin \omega t, \quad t > 0. \quad (19)$$

На входе области (AQ), задается вертикальный профиль скоростей:

$$u(z) = \frac{u_*}{\chi} \cdot \ln \frac{z + z_0}{z_0}. \quad (20)$$

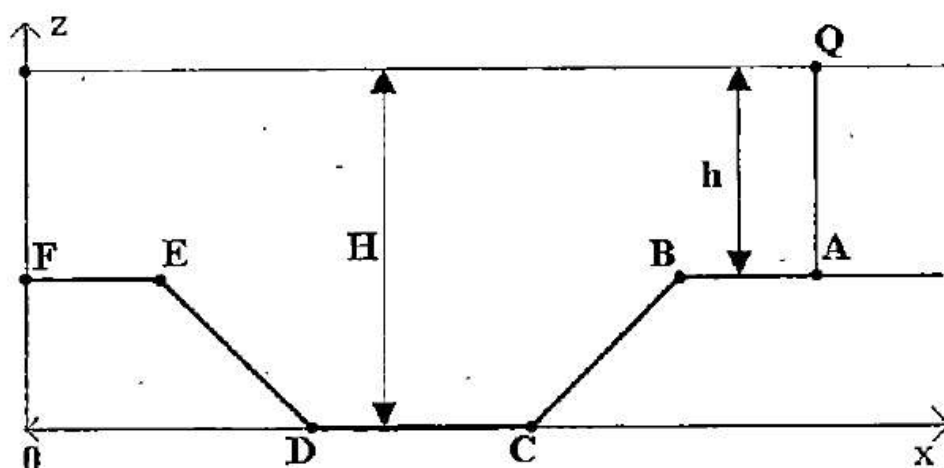


Рис. Поперечное сечение канала.

На верхней границе области ( $z = z_T$ ) для температуры примем данные метеостанции. Для уравнений ветрового переноса и диффузии субстанции (7) в данном случае краевые условия на поверхности канала можно принять из следующих соображений. На отрезке АВ, откуда снежный поток поступает в канал, будем считать, что субстанция, поднимаемая микротурбулентными пульсациями ветра, поступает в атмосферу от подстилающей поверхности. Следуя [12] для описания поступления частиц субстанции с подстилающей поверхности используем краевое условие на

АВ:  $v \frac{\partial \bar{C}}{\partial n} = -\beta \bar{C} = -f$ ,  $f > 0$  - функция параметризующая процессы обмена с субстанциями между землей и атмосферой. Хотя в общем случае функция  $f$  зависит от многих факторов, в частности от приземной скорости ветра, состояния почвы, в данной работе для простоты примем  $f = const$ . На остальных частях ломанной условие (12) остается без изменения.

Практический интерес представляет порядок значений турбулентного трения, при которых начинается перенос, например, снежных частиц. Отрыв снежных частиц от поверхности снега зависит не только от скорости ветра и турбулентного трения, но и от физико-механических свойств снежного покрова (плотности, наличия ледяной корки и т.д.) снежный покров, обладающий относительно небольшой плотностью и связанностью, более податлив переносу. Многочисленные исследования показали, что перенос снега в большинстве случаев начинается при скоростях ветра от 4 до 10 м/с. Это соответствует турбулентному трению от 0,4 до 2,7 г/см<sup>2</sup> при  $z_0 = 0,05$  см [4].

Надо отметить, что на отрезке EF можно принять условие  $\bar{C}(x, z, t) = C^0(x, t)$ , где  $C^0(x, t)$  первоначальный покров снега.

Интенсивность и осадки на поверхность канала можно описать формулами:

$$I = \frac{4}{3}\pi R^3 C_0 W_g(R), \quad F = \int_0^T I(t) dt, \quad (21)$$

где  $C_0$  – субстанция на поверхности,  $R$  – радиус частицы,  $W_g$  – скорость седиментации,  $T$  – конечное время.

Осадок субстанции на дно канала на практике можно определить:

$$F = \frac{\nu\beta}{H} \int_0^T \bar{C}(x, z, t) dt. \quad (22)$$

#### Конечно-разностный метод решения уравнения гидродинамики методом фиктивных областей

За последнее десятилетие достигнуты значительные успехи по численному моделированию заносов снегом и сыпучими средами с помощью уравнения гидродинамики на относительно ровной поверхности. Однако, наличие криволинейной границы приводит к значительному усложнению вычислительных алгоритмов, используемых для решения нелинейных уравнений. Обзор математических моделей, учитывающих криволинейную нижнюю границу, можно найти в работе [6]. Рассмотрим, два способа учета криволинейной формы:

1. Применение специальной криволинейной системы координат с приведенной высотой, позволяющей преобразовывать исходную область интегрирования со сложной геометрической формой к прямоугольному параллелепипеду, например

$$x = x', \quad t = t', \quad z^* = z - \frac{z_g(x)}{A}, \quad A = \frac{H}{H - z_g(x)},$$

где  $z_g(x)$  – криволинейная нижняя граница области,  $H$  – условная высота.

Вследствие этих преобразований изменяется и вид краевых условий на твердой поверхности. В новых переменных  $(x', t', z^*)$  уравнения (1) – (5) усложняются за счет появления дополнительных членов, требующих изменения основного алгоритма. Форма рельефа деформируется.

2. Использование метода фиктивных областей, состоит в дополнении фактической области интегрирования криволинейной границей и сводится к численному решению систем уравнений, полученных в результате преобразования исходной задачи, в более простых областях.

Для учета криволинейной границы воспользуемся идеей метода фиктивных областей. Не прибегая к модификации дифференциальных уравнений исходной модели в фиктивных областях, изложим общую схему этого метода применительно к нестационарной задаче рассматриваемого класса. Уравнения (1) – (5) запишем в операторной форме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A_1 \varphi = F_1, \quad \varphi = (u, w), \quad (23)$$

где матрица  $A$  имеет форму:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - \Delta_u & 0 & S & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{d}{dt} - \Delta_w & \lambda & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} - \Delta_T & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть операторное уравнение определяется в области  $D_1$ . Дополним область  $D_1$  до четырехугольника  $D$ , и будем рассматривать на ней следующую задачу:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + A \tilde{\varphi} = F, \quad (24)$$

где

$$A = \begin{cases} A_1 & \text{для } (x, z) \in D_1 \\ 0 & \text{для } (x, z) \in D_2 \end{cases} \quad \text{для } (x, z) \in D_1; \\ F = \begin{cases} F_1 & \text{для } (x, z) \in D_1 \\ 0 & \text{для } (x, z) \in D_2 \end{cases} \quad \text{для } (x, z) \in D;$$

Через  $D_2$  обозначено дополнение основной области  $D_1$  до прямоугольника  $D$ . Идея метода фиктивных областей в этом случае с конструктивной точки зрения является очень удобной для численного решения уравнения гидродинамики (1) – (4).

### Численный алгоритм решения разностных уравнений

Следуя [5] на каждом временном шаге  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  будем расщеплять задачу на два этапа по каждой координате (перенос и турбулентный обмен):



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u u}{\partial x} - \mu_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} - \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} - \mu_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial w T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

После этого решаем динамическое согласование гидродинамических полей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \lambda \cdot T'. \quad (7)$$

Краевые условия остаются те же, т.е. (13) – (17).

Введем в непрерывной области определения переменных  $x, z, t$ .  $D_{\alpha t} = D \times [0, T]$  сеточную область  $D_{\alpha t}^h$  как прямое произведение одномерных сеток в направлении соответствующих координат:

$$D_{\alpha t}^h = \omega_x \times \omega_z \times \omega_t. \quad (28)$$

На сетке  $D_{\alpha t}^h$  определим пространства сеточных функций  $\bar{\varphi}^n \in Q^n(D_{\alpha t}^h)$ ,  $\bar{\varphi}^n = \{\bar{\varphi}_{ij}^n = \bar{\varphi}(x_i, z_j, t^n)\}$ ,  $\bar{\varphi}^n = (u^n, w^n, P^n)$ ;

Тогда уравнение (1) – (3) аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1/2j}^n u_{i+1/2j}^{n+1/2} - u_{i-1/2j}^n u_{i-1/2j}^{n+1/2}}{2\Delta_i} + \frac{\mu_x (u_{i-1j}^{n+1/2} - 2u_{ij}^{n+1/2} + u_{i+1j}^{n+1/2})}{\Delta_i^2} = 0, \\ \frac{w_{ij}^{n+1/2} - w_{ij}^n}{\Delta t/2} + \frac{u_{i-1/2j}^n w_{i-1j}^{n+1/2} - u_{i+1/2j}^n w_{i+1j}^{n+1/2}}{2\Delta_i} + \frac{\mu_x (w_{i-1j}^{n+1/2} - 2w_{ij}^{n+1/2} + w_{i+1j}^{n+1/2})}{\Delta_i^2} = 0 \\ \frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^n}{\Delta t/2} + \frac{u_{i+1/2j}^n T_{i+1j}^{n+1/2} - u_{i-1/2j}^n T_{i-1j}^{n+1/2}}{2\Delta_i} + \mu \frac{T_{i-1j}^{n+1/2} - 2T_{ij}^{n+1/2} + T_{i+1j}^{n+1/2}}{\Delta_i^2} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{w_{i-1/2}^{n+1/2} u_{i-1/2}^{n+1} - w_{i-1/2}^{n+1/2} u_{i+1/2}^{n+1}}{2\delta_j} + \frac{1}{\delta_j} \left[ v_{j-1/2} \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}}{\Delta z_j} - v_{j+1/2} \frac{u_{ij+1}^{n+1} + u_{ij}^{n+1}}{\Delta z_{j+1}} \right] &= 0, \\ \frac{w_{ij}^{n+1} - w_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{w_{j-1/2}^{n+1/2} w_{j-1}^{n+1} - w_{j-1/2}^{n+1/2} w_{j+1}^{n+1}}{2\delta_j} + \frac{1}{\delta_j} \left[ v_{j-1/2} \frac{w_{ij}^{n+1} - w_{ij-1}^{n+1}}{\Delta z_j} - v_{j+1/2} \frac{w_{ij+1}^{n+1} + w_{ij}^{n+1}}{\Delta z_{j+1}} \right] &= 0, \\ \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} T_{ij+1}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n+1/2} T_{ij-1}^{n+1}}{2\delta_j} + \frac{1}{\delta_j} \left[ v_{j-1/2} \frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij-1}^{n+1}}{\Delta z_j} - v_{j+1/2} \frac{T_{ij+1}^{n+1} - T_{ij}^{n+1}}{\Delta z_{j+1}} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) очень просто реализуется методом скалярной прогонки [6].

Полученные из решения поля скоростей  $(u^{n+1}, w^{n+1})$  не удовлетворяют уравнению неразрывности (3). Поэтому следующим этапом вычислений является коррекция их по давлению. А именно, на втором полушаге по времени решаются уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \lambda T, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

На первом полушаге полученные значения обозначим  $u^* = u^{n+1}$ ,  $w^* = w^{n+1}$  и представим временные производные в уравнениях (31) в конечно-разностном виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{w^{n+1} - w^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \lambda T, \quad (32)$$

где  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени. Подставим (32) в уравнение неразрывности (3), учитывая, что скорость в момент времени  $t^{n+1}$  должны удовлетворять условию этого уравнения. Тогда получим

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (33)$$

После решения диагностического уравнения (33) находим исправленные значения скоростей  $u^{n+1}$  и  $w^{n+1}$ . Надо отметить, что уравнение (33) решается по известным методам верхней релаксации [6].

Остановимся теперь на следующем. Второй член в правой части уравнения (33) много больше первого. Вследствие этого при решении (33) могут возникать большие ошибки. Чтобы эти ошибки не возникли, рас-

смотрим давление в виде двух слагаемых  $P = P_s + P_d$ . Гидростатическое давление определяется из уравнения квазистатики

$$\frac{\partial P_s}{\partial z} = \lambda T; \quad (34)$$

для определения  $P_s$  из (33) и (34) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 P_s}{\partial x^2}. \quad (35)$$

Формула (32) в результате преобразования сводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} &= u^* - \Delta t \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_s}{\partial x} \right), \\ w^{n+1} &= w^* - \Delta t \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Теперь рассмотрим метод решения уравнения переноса. При решении уравнения переноса предъявляются дополнительные требования к разностной схеме и методам решения. Поскольку концентрация по физическому смыслу является неотрицательной величиной, целесообразно использовать так называемые «монотонные» схемы, позволяющие получать неотрицательные решения. Для уравнения (7) ставим общие краевые условия, а частные краевые условия легко получаются из общего. Отметим, что уравнение описывает только одну компоненту субстанции, например для снега. Тогда уравнение переноса имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + (W - W_g) \frac{\partial C}{\partial z} = \mu \Delta_c C. \quad (37)$$

Для (37) ставим следующие краевые условия:

$$C = 0 \text{ при } z = H, \quad (38)$$

$$\mu \frac{\partial C}{\partial z} = -f \text{ при } z = z_0, \quad (39)$$

$$\mu \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ при } x = (0; l), \quad (40)$$

$$C(x, z, t) = 0 \text{ при } t = 0. \quad (41)$$

Для получения дискретного по времени и пространству решения поставленной задачи (37) – (41) применим метод конечных элементов и метод конечных разностей [8], соответственно для аппроксимации производной по времени и пространственным координатам. Таким образом, заменяя производную от времени в уравнении (37) ее конечно-разностным аналогом, имеем:

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = \mu \frac{\partial^2 C^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 C^n}{\partial z^2} - U^n \frac{\partial C^n}{\partial x} - (W^n - W_g) \frac{\partial C^n}{\partial z}, \quad (42)$$

$$\begin{cases} C^{n+1} = 0 & \text{при } z = H \\ \mu \frac{\partial C^{n+1}}{\partial z} = -\beta C^{n+1} & \text{при } z = z_0 \\ \mu \frac{\partial C^{n+1}}{\partial x} = 0 & \text{при } x = (0; l) \\ C^{n+1} = 0 & \text{при } t = 0 \end{cases}, \quad (43)$$

где  $n = 0 \dots N$  – дискретное время;  $t^n = n\Delta t$ ,  $\Delta t$  – шаг по времени;  $C(n, x, z) = C(n\Delta t, x, z)$  – значение концентрации в дискретные моменты времени. Уравнения (42)–(43) описывают конечно-разностную аппроксимацию по времени концентрации в двумерном пространстве  $x, z$ .

Для получения модели, дискретной по координатам  $x, z$  используем метод расщепления по физическим факторам, который позволяет свести решение задачи (42)–(43) к эквивалентным подзадачам в одномерных пространствах. В результате применения двухциклической схемы Марчука [8] получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{C(n+1/4, x, z) - C(n, x, z)}{\Delta t} &= \Lambda_1 \{C(n+1/4, x, z) + C(n, x, z)\} / 2 \\ \frac{C(n+2/4, x, z) - C(n+1/4, x, z)}{\Delta t} &= \Lambda_2 \{C(n+2/4, x, z) + C(n+1/4, x, z)\} / 2 \\ \frac{C(n+3/4, x, z) - C(n+2/4, x, z)}{\Delta t} &= \Lambda_1 \{C(n+3/4, x, z) + C(n+2/4, x, z)\} / 2 \\ \frac{C(n+1, x, z) - C(n+3/4, x, z)}{\Delta t} &= \Lambda_2 \{C(n+1, x, z) + C(n+3/4, x, z)\} / 2 \end{aligned} \right\}, \quad (44)$$

где операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  имеют вид:

$$\Lambda_1 \equiv -u \frac{\partial C}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad \Lambda_2 \equiv -(W - W_g) \frac{\partial C}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.$$

Последовательное решение уравнения (44) в одномерных пространствах дает решение исходного уравнения (37) в целом. Первое уравнение системы (44) решается для каждого значения координат  $z$ . Аналогично каждое следующее уравнение решается для всех значений остальных координат. Для разностной аппроксимации уравнений (44) по координатам  $x, z$  воспользуемся методом конечных элементов [8]. Дискретизация проводится по каждой координате  $x, z$  по отдельности. Область  $[0, H]$  разбивается на  $N$  интервалов с неравномерным шагом, для увели-

чения точности дискретной модели. В результате по каждой координате  $x, z$  получаем массив  $\{\Delta z_j, \Delta x_j\}$ .

Так как уравнения (44) однотипны, то рассмотрим только одно из них. Причем будем опускать индекс, обозначающий номер координаты, и обозначения другой координаты входящих в уравнение в виде параметров, а через  $C(n, i)$  обозначим значение функции в момент времени  $t_n = (n + i/6)\Delta t$  в точке  $z_i = i\Delta z$ . С учетом принятых допущений рассмотрим решение уравнения вида:

$$C(n+1, z) = \Lambda_0 C(n, z), \quad z \in [0, H] \text{ с краевыми условиями}$$

$$C(n+1, z) = 0 \text{ при } z = H,$$

$$C(n+1, z) = -\beta C(n, z) \text{ при } z = z_0.$$

Внутри интервала  $I_{2i} = (z_{i-1}, z_{i+1})$  интерполируем функцию  $C(n, z)$  квадратичным полиномом

$$C(n, z) = a_i(z - z_i)^2 + b_i(z - z_i) + s_i, \quad z \in I_{2i} \quad (45)$$

в котором коэффициенты  $a_i, b_i$  и  $s_i$  изменяются от интервала к интервалу. Для их определения используем условие прохождения параболы (45) через точки  $C(n, i), C(n, i + 1/2), C(n, i + 1)$ . В результате получаем следующие значения коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{C(n, i-1)\Delta z_{i+1} - C(n, i)(\Delta z_i + \Delta z_{i+1}) + C(n, i+1)\Delta z_i}{\Delta z_i \cdot \Delta z_{i+1} \cdot (\Delta z_i + \Delta z_{i+1})} \\ b_i &= \frac{C(n, i+1)\Delta z_i^2 + C(n, i)(\Delta z_{i+1}^2 - \Delta z_i^2) - C(n, i-1)\Delta z_{i+1}^2}{\Delta z_i \cdot \Delta z_{i+1} \cdot (\Delta z_i + \Delta z_{i+1})} \\ s_i &= C(n, i) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Аппроксимируя  $u(i, z)$  и считая, что они изменяются внутри интервала  $I_i = (z_{i-1}, z_i)$  и  $I_{i+1} = (z_i, z_{i+1})$  получаем

$$u(i, z) = \begin{cases} u(n, i-1) + (z - z_i)[u(n, i) - u(n, i-1)]/\Delta z, & z \in I_i \\ u(n, i) - (z - z_i)[u(n, i+1) - u(n, i)]/\Delta z_{i+1}, & z \in I_{i+1} \end{cases} \quad (47)$$

Для получения модели, дискретной по пространству, применим одну из разновидностей метода конечных элементов — метод Галеркина [6, 8]. Согласно этому методу на принятой сетке с шагом  $\Delta z_i$  определим систему базисных функций вида

$$q_i(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}, & z \in I_i \\ 1 - \frac{z - z_i}{z_{n+1} - z_i}, & z \in I_{i+1} \end{cases}, \quad (48)$$

причем  $q_i(z_{i-1}) = q_i(z_{i+1}) = 0$ ;  $q_i(z_i) = 1$ .

Приближенное решение  $C(n, i)$  исходного уравнения (37) ищем в виде линейных комбинаций базисных систем:

$$C(n, i) = \sum_{i=0}^N C(n, i) q_i(z). \quad (49)$$

Приравнивая к нулю скалярное произведение уравнения (37) и учитывая (49) получим для нахождения коэффициентов  $C(n, i)$ . Под скалярным произведением здесь понимается интеграл от произведения функций, взятый по области  $[0, H]$ , т.е.

$$\int_0^H (AC - f - \bar{w}) q dz = 0, \quad (50)$$

где  $(AC - f - \bar{w})$  – символическое обозначение рассматриваемого уравнения (34). После численного интегрирования и ряда алгебраических преобразований получаем:

$$a_{-1}(i+1)C(n+1, i-1) + a_0(n+1)C(n+1, i) + a_1(n+1)C(n+1, i+1) = \\ = a_{-1}(n)C(n, i-1) + a_0(n)C(n, i) + a_1(n)C(n, i+1) \quad (51)$$

где  $a_{-1}(n+1)$ ,  $a_0(n+1)$ ,  $a_1(n+1)$ ,  $a_{-1}(n)$ ,  $a_0(n)$ ,  $a_1(n)$  – коэффициенты разностного уравнения, определяемые через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и параметры дискретизации. Для решения неявных разностных уравнений типа (50) можно применить метод прогонки [5, 6], который удобен тем, что при сравнительной простоте программной реализации он требует относительно мало машинных ресурсов. Этот принцип решения (7) с краевыми условиями дает возможность одновременно решать уравнения гидродинамики и ветрового переноса субстанции. Надо отметить, построенная схема решения ветрового переноса с помощью конечных элементов является монотонной разностной схемой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей. Под редакцией Ф.Т.М. Ньистада и Х. Ван-Дона Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 341 с.

2. Бялобженский, Дюнин А.К. и др. Зимнее содержание автомобильных дорог. М.: Транспорт, 1983, 150 с.
3. Закиров Р.С. Предупреждение песчаных заносов железных, автомобильных дорог и ирригационных сооружений. –М.: ЦМП ГКНТ СССР, 1983. –с.165.
4. Копанев Н.Д. Методы изучения снежного покрова. –Л.: Гидрометеоздат, 1971 –225 с.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982, 315 с.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989 – 614 с.
7. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1976. 628 с.
8. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнения с конечными производными. –М.: Мир, 1981 – 160 с.
9. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, 1965
10. Семенов О.Е. Особенности строения приземного слоя атмосферы при песчаных бурях. // Сб. «Проблемы гидрометеорологии и экологии», Алматы, 2001, с.59-63
11. Murgur L. A numerical model of the urban heat island// J. Appl. Meteorol. №8, p.908-918, 1991.
12. Shreffler J.H. Numerical experimentation with particles having non – zero terminal velocity in the atmospheric surface layer // Bound. Layer Meteorol. 1995, v.9, №2.

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати.

## КАНАЛ ҚАЗЫЛЫМДАРЫНЫҢ ЖЕЛ ҰШЫРЫНДЫЛАРЫМЕН ТОЛУЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛДЕУ

Техн. ғылымд. канд. С.М. Қойбақов

*Қазылымдардың аэродинамикалық ағып лүтуін сандық эксперименттер кълмегімен болжамдау арқылы ашық каналдар арналарын борасын қарлармен және суырмалы топырақтармен толуының математикалық моделі берілген.*