УДК 551.515.532.5.18

Канд. техн. наук И.Г. Гуршев [*]

ВОЗМОЖНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

УРАВНЕНИЯ, ПЕСЧАНАЯ БУРЯ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОТОКА ПО ВЕРТИКАЛИ

Рассматривается возможность решения уравнений турбулентного пограничного слоя атмосферы без использования предположений о связи составляющих осреднённых скоростей потока и их пульсаций. Получено распределение скорости потока по вертикали во время песчаной бури при нейтральной термической стратификации в виде линейно-логарифмической функции.

Важность изучения турбулентных течений среды обусловлена их широким распространением в природе и технике. Для описания турбулентности в воздушной среде предполагается, что значения метеорологических величин, например, скорость ветра, могут быть представлены в виде суммы осреднённых во времени величин и их пульсационных значений или пульсаций.

Однако введение в систему уравнений для составляющих скоростей потока пульсационных значений приводит к появлению новых неизвестных слагаемых и к проблеме незамкнутости системы уравнений [3]. В свою очередь поиски решения проблемы замыкания приводят к поискам связей между осреднёнными величинами и их пульсациями.

В связи с существованием проблемы замыкания системы уравнений, по-видимому, возможен отказ от идеи существования связи между осреднёнными и пульсационными движениями среды. Для рассмотрения такой возможности воспользуемся прямоугольной системой координат и системой уравнений из работы Вагера и Надёжиной [3].

Необходимо отметить, что нижеследующие рассуждения проводятся в предположении отсутствия притоков тепла и притоков влаги, и поэтому входящие в систему уравнений [3] соотношения для притока теп-

[*] г. Санкт-Петербург

ла и притока влаги, в данном случае не рассматриваются. Дополнительно отметим, что далее рассматриваем стационарное турбулентное течение потока, как течение несжимаемой жидкости.

Таким образом, принимаем следующую систему уравнений [3]

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+f\upsilon+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\overline{u'u'}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}+\overline{\upsilon'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}+\overline{w'u'}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial \gamma}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

где u, υ, w – компоненты скорости потока по осям OX, OY, OZ; давление $p=const$; ρ – плотность; f – параметр Кориолиса; ν – коэффициент кинематической вязкости воздуха; u', υ', w' – пульсации скоростей.

В системе уравнений (1) черта сверху над произведением обозначает среднее значение. Дальнейшие построения проводятся для составляющих скоростей ветра в вертикальной плоскости XOZ. В этом случае полагаем $\upsilon=0, \upsilon'=0$. Таким образом получаем такую систему уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}+\overline{w'u'}\right), \quad (2)$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad (4)$$

Умножив обе части уравнения неразрывности (4) на u, и сложив с уравнением (2), получим такую систему уравнений

$$\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}+\overline{w'u'}\right). \quad (5)$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (6)$$

Воспользуемся предположением из работы [3] об однородности метеорологических величин по оси OY, т.е., предполагаем $\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

В результате получим уравнения

$$\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uw}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+\overline{w'u'}\right). \qquad (7)$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (8)$$

Из условия $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ следует, что $u(y)=u_0=const$.

В этом случае из уравнения (8) получаем равенство

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=u_0\cdot\rho\cdot f.$$

Последний результат означает, что изменение давления в перпендикулярном к потоку направлении является постоянной величиной.

Преобразуем уравнение (7), объединяя слагаемые, и получим такое равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2-v\frac{\partial u}{\partial x}-\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(uw-v\frac{\partial u}{\partial z}-\overline{w'u'}\right)=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (9)$$

Используем равенство (9) для нахождения зависимости $u=u(z)$. В этом случае, в силу независимости координат x и z друг от друга, первое слагаемое в левой части равенства (9) обращается в ноль. Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(uw-v\frac{\partial u}{\partial z}-\overline{w'u'}\right)=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (10)$$

В уравнении (10) сумма величин $uw-v\frac{\partial u}{\partial z}-\overline{w'u'}$ характеризует перенос вещества за счет действия осреднённого, турбулентного и молекулярного механизмов перемешивания. Такой совместный механизм перемешивания вещества в турбулентной среде за счёт действия трёх факторов предлагается называть объединенным переносом вещества.

Введем в рассмотрение соотношение

$$uw-v\frac{\partial u}{\partial z}-\overline{w'u'}=c_0\lambda\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (11)$$

где c_0 – безразмерная постоянная; λ – некоторая функция, являющаяся, в общем случае, функцией координат и времени.

Предполагаем, что λ является непрерывной функцией. Так как рассматриваются стационарные процессы, то полагаем независимость функции λ от времени.

Размерность функции λ можно установить с помощью равенства (11), левая часть которого имеет размерность $L^2 \cdot T^{-2}$ (L , T – соответственно символы размерностей длины и времени). Из равенства (11) следует, что λ имеет размерность $L^2 \cdot T^{-1}$, так как размерность правой части равенства (11) также должна быть равной $L^2 \cdot T^{-2}$. По-видимому, параметр λ можно считать коэффициентом объединённого переноса вещества. Допустим, что функция λ зависит от координаты z , т.е. $\lambda = \lambda(z)$. Используя равенство (11), получаем такое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(c_0 \lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (12)$$

В отношении функции p в уравнении (12) предполагаем, что величина p – функция координаты x , т.е. $p = p(x)$. Таким образом, левая часть равенства (12) является функцией переменной z , а правая, по предположению, есть функция от x . При независимости координат x и z друг от друга соотношение (12) может быть в случае постоянства левой и правой частей равенства (12). Таким образом, имеем равенство $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = A$. Размерность постоянной A равна $L \cdot T^{-2}$, что можно установить, проводя операции над размерностями входящими в дробь величин. С другой стороны размерность левой части равенства (12) также равна $L \cdot T^{-2}$. Значит, имеем равенство

$$\frac{d}{dz}\left(c_0 \lambda \frac{du}{dz}\right) = A. \qquad (13)$$

Уравнение (13) интегрируется и получается следующий результат

$$c_0 \lambda \frac{du}{dz} = Az + B, \qquad (14)$$

где B – постоянная интегрирования. Размерность постоянной B равна $L^{-2} \cdot T^{-2}$. Последнее можно установить, рассматривая соотношение между размерностями членов равенства (14). Представим функцию λ в таком виде

$$\lambda(z) = c_1 \cdot z, \qquad (15)$$

где c_1 – постоянная величина.

Необходимо отметить, что размерность величины c_1 совпадает с размерностью скорости, так как правая и левая части равенства (15) должны иметь одинаковую размерность $L^{-2} \cdot T^{-1}$

Использование приведенных предположений позволяет получить такое дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dz} = \frac{A}{c_0 c_1} + \frac{B}{c_0 c_1 z}. \tag{16}$$

Интегрируя уравнение (16) находим выражение для функции $u(z)$, т.е.

$$u(z) = \frac{Az}{c_0 c_1} + \frac{B}{c_0 c_1} \ln z + F, \tag{17}$$

где F – постоянная интегрирования.

Обычно для скорости u принимается условие прилипания воздушного потока ($u = 0$) на уровне шероховатости ($z = z_0$), т.е. граничное условие такое: $z = z_0$, $u = 0$. Отметим, что параметр шероховатости z_0 определяется из опытных данных.

Однако во время песчаных бурь возникает перенос песчаных частиц и поэтому граничное условие необходимо сформулировать с учётом появления переноса песка. В свою очередь перенос песчаных частиц возникает по достижении потоком величины критической скорости u_k для частиц песка определённого размера [5]. В этом случае граничное условие может быть таким: $z = z_0$, $u = u_k$

Используя зависимость (17) и граничное условие $z = z_0$, $u = 0$, находим выражение

$$u(z) = \frac{A(z - z_0)}{c_0 c_1} + \frac{B}{c_0 c_1} \ln \frac{z}{z_0}. \tag{18}$$

Размерность слагаемых в формуле (18) можно установить по известным размерностям величин A, B, c_1 Множитель $\frac{A}{c_0 c_1}$ имеет размерность обратную времени, т.е. первое слагаемое в формуле (18) имеет размерность скорости.

Рассмотрим частный случай. Если $\frac{dp}{dx} = 0$, т.е. $A = 0$, то из уравнения (17) получаем такое равенство

$$u(z)=\frac{B}{c_0c_1}\ln z+F. \tag{19}$$

Использование граничного условия $z=z_0$, $u=0$ даёт $F=0$, и в этом случае имеем такую зависимость

$$u(z)=\frac{B}{c_0c_1}\ln\frac{z}{z_0}. \tag{20}$$

Дополнительно рассмотрим следующее: в равенствах (18)…(20) дробь $u_1=\frac{B}{c_1}$ является постоянной величиной и имеет размерность скорости. Предположим, что постоянная u_1 является величиной динамической скорости u_* потока. Допустим, что безразмерная постоянная c_0 равна постоянной Кармана, т.е. $c_0=k=0{,}4$. В этом случае формула (20) совпадает с известной логарифмической зависимостью

$$u=\frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0}. \tag{21}$$

Формула (20) при вышесказанных допущениях и граничном условии $z=z_0$, $u=u_k$ принимает следующий вид

$$u-u_k=\frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0}. \tag{22}$$

Введём в рассмотрение следующее

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\Delta p}{l}, \tag{23}$$

где Δp – падение давления по направлению движения потока на произвольно выбранном участке длиной l.

В этом случае формула (18) становится такой

$$u=\frac{\nabla p}{\rho lkc_1}(z-z_0)+\frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0}. \tag{24}$$

Уравнение (24) может быть преобразовано в следующую зависимость

$$u=\frac{u_*\nabla p}{u_*\rho lkc_1}(z-z_0)+\frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0}=\frac{u_*}{k}\left[\frac{\nabla p(z-z_0)}{\rho u_*c_1l}+\ln\frac{z}{z_0}\right]. \tag{25}$$

Дробь $\frac{\nabla p}{\rho u_* c_1}$ является безразмерным соотношением, т.е. сумма слагаемых в квадратных скобках в формуле (25) – безразмерная величина. Если $\nabla p, u_*, c_1$ остаются постоянными во время песчаной бури, то вышеупомянутое соотношение – постоянная величина и формула (25) имеет такой вид

$$u = \frac{u_*}{k}\left(\ln\frac{z}{z_0} + const\frac{z - z_0}{l}\right). \tag{26}$$

В работах [1, 2, 4…6] показано, что в случае термически нейтрально стратифицированного двухфазного потока, распределение скорости может быть описано следующей зависимостью

$$u(z) = \frac{u_*}{k}\left(\ln\frac{z}{z_0} + b\frac{z}{L_d}\right), \tag{27}$$

где b – постоянная, L_d – масштаб длины по Баренблатту-Голицину [1, 2, 6].

Полученная зависимость (26) качественно совпадает с приведенной формулой (27).

В работах [4, 5] даётся описание песчаных бурь и измерений скорости потока в условиях безразличной стратификации пограничного слоя. Полученные в полевых условиях результаты измерений по распределению скорости потока в вертикальной плоскости удовлетворительно описываются функцией вида (27).

В заключение отметим, что зависимость (26) переходит в известное логарифмическое распределение скорости потока при $\nabla p = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17. – Вып. 3.– С. 261-274.
2. Баренблатт Г.И., Голицын Г.С. Локальная структура развитых пыльных бурь. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 44 с.
3. Вагнер Б.Г., Надёжина Е.Д. Пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 136 с.
4. Семёнов О.Е. Об ускорении потока во время сильных песчаных и пылевых бурь // Гидрометеорология и экология. – 2000. – №3-4. – С. 23-48.

5. Семёнов О.Е. Введение в экспериментальную метеорологию и климатологию песчаных бурь. – Алматы: ИП Волкова Н.А., 2011. – 580 с.
6. Barenblatt G.I., Golitsyn G.S. Local structure of Matyre Dust Storms // Atmos. Sci. – 1974. – Vol. 31, №7. – P. 1917-1933.

Поступила 20.10.2015

Техн. ғылымд. канд. И.Г. Гуршев

АТМОСФЕРАНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ҚАБАТЫНЫҢ ТЕҢДІГІН ШЕШУДЕГІ МҮМКІН АМАЛДАР

ТЕҢДІК, ҚҰМДЫ ДАУЫЛ, ТІК АҒЫННЫҢ ТАРАЛУ ЖЫЛДАМДЫҒЫ

Атмосфераның турбуленттік шекара қабатының теңдігін шешу мүмкіншілігі ағынның орташаланған жылдамдығын және олардың пульсациясын құрайтын байланысты ескермеген жағдайда қарастырылады. Құмды дауылдағы ағынның тігінен таралу жылдамдығы бейтарап термиялық стратификациядағы сызықтық-логарифмдік функциясы түрінде анықталды.