

УДК 528.88(15), 528.85/.87(15)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Канд. геогр. наук А.Х. Ахмеджанов

Во многих задачах физики атмосферы, метеорологии и экологии важно знание пространственного распределения метеорологических элементов над конкретным районом, поэтому в данной работе предлагаются численные модели региональных атмосферных процессов.

За последние десятилетия на основе результатов теоретических разработок в динамической метеорологии и методов вычислительной математики, а также, благодаря появлению современных быстродействующих электронно-вычислительных машин, было создано новое направление в динамической метеорологии – численное моделирование атмосферных процессов. Основой этих методов являются численные модели атмосферных процессов. Основателем этого направления является советский ученый И.А. Кибель [2], который впервые теоретически обосновал возможность прогноза погоды на основе фундаментальных законов физики атмосферы с использованием уравнений гидротермодинамики. Вопросы теории и реализации этих уравнений имеются в работах Ф.Д. Томпсона и М.И. Юдина [9, 10].

Баротропные модели ограничены по своему физическому содержанию, так как в них учитывается только перераспределение кинетической энергии при дисперсии волновых процессов. Эти модели послужили хорошей основой для создания бароклинической модели атмосферы.

Бароклинические квазигеострофические модели предполагают более сложные процессы, связанные с превращениями кинетической энергии во внутреннюю и обратно. В результате численных экспериментов стало известно, что баротропные модели только в некоторых случаях описывают циклогенез, а бароклиническая квазигеострофическая модель описывает до 60...70 % случаев циклогенеза.

Численные схемы моделирования атмосферных процессов на основе бароклинических квазигеострофических моделей получили большое развитие в работах Г.И. Марчук и А.С. Монин [3-8].

Следующим крупным шагом было применение численных схем, основанных на интегрировании полных гидродинамических моделей атмосферных процессов. В отличие от квазигеострофических (квазисоленоидальных) моделей, описывающих крупномасштабные процессы и инерционные атмосферные волны, модели с полными уравнениями гидротермодинамики описывают как крупномасштабные, так и мезомасштабные процессы (в зависимости от шага сетки), инерционные, гравитационные, внешние и внутренние волны.

Численные модели атмосферы делятся на глобальные (полушарные), которые предназначены для прогноза на несколько суток, региональные с уменьшенным шагом сетки для прогноза по регионам на 1...2 суток, и локальные, используемые для детализированного прогноза в течение суток для конкретной местности.

На основе крупномасштабных численных моделей атмосферы рассчитывается пространственно-временное распределение метеорологических величин. К этим величинам относятся давление, температура, составляющие скорости ветра. Сам же прогноз погоды должен включать в себя ряд других метеорологических величин, таких как облачность, осадки, туман, видимость, максимальную и минимальную температуру воздуха, а также различные опасные явления природы (грозы, засухи, метели и др.). Следовательно, крупномасштабные прогностические модели прогнозируют фоновые состояния метеорологического режима. Эти модели дают возможность расчета величин, осредненных по площади элементарных ячеек в расчетной сетке моделей, равной примерно 300×300 км. Осредненные параметры дают возможность моделирования крупномасштабного синоптического процесса.

Региональная баротропная модель атмосферы

В исследованиях атмосферы достаточно часто применяются уравнения мелкой воды, получаемые из полных уравнений гидротермодинамики в результате предположения однородности потока по высоте. Такие модели атмосферы называются баротропными. В баротропной атмосфере плотность воздушных масс есть функция давления. Подобное допущение возможно для так называемого среднего уровня атмосферы. Аэрологические исследования показывают, что этот слой может находиться между высотами 2 и 8 км. В оперативной практике за средний уровень атмосферы принимают уровень поверхности 500 или 700 гПа.

Баротропная модель атмосферы сравнительно простая, поэтому является одним из подготовительных этапов для создания более сложных моделей. Одним из удобных примеров баротропной модели атмосферы является работа Д.Я. Прессмана, описанная в [1]. Исходная система уравнений гидродинамики в случае мелкой воды запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - lV + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - lU + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} + V \frac{\partial f}{\partial y} + f_c \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где $f = g \cdot z$ – геопотенциал; g – ускорение свободного падения (9,8 м/с); U, V – составляющие скорости ветра; f_c – постоянная, являющаяся средним значением геопотенциала в рассматриваемом слое; l – коэффициент Кориолиса, равный примерно 10^{-4} с^{-1} для средних широт.

Начальными условиями могут служить данные численного анализа для средней высоты слоя (500 гПа), перенесенные в узлы рассматриваемой сетки.

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_H(x, y, z) = V_H(x, y, z), \\ f(x, y, z) - f_H(x, y, z) & \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Значения U_H, V_H и f_H могут определяться из результата численного анализа данных изобарической поверхности 500 гПа. Эти данные могут быть получены по результатам высотного зондирования, картам барической топографии Гидрометцентра Российской Федерации (РФ) и Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды.

Способ, используемый в оперативной прогностической модели Национального метеорологического центра США, в котором на боковых границах предполагают наличие буферной зоны, располагающейся вокруг рассматриваемой области, является наиболее удачным. В пределах буферной зоны решается краевая задача для уравнения Лапласа с изменяющимися по времени граничными условиями на внутренней и внешней границе. Граничные условия можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} U|_r &= U_r; \quad V|_r = V_r; \quad \Phi|_r = \Phi_r \quad \text{и} \\ \Delta v|_r &= \Delta V|_r = \Delta f|_r = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – лапласиан, z – индекс, обозначающий границу рассматриваемой области.

Задание условий в виде (3) позволяет находить значения граничных значений искомых функций на каждом новом шаге по времени на основе знания значений функций во внутренних точках, определяемых на основе их предыдущего состояния по времени.

Постановку задачи (1) с начальными (2) и граничными условиями (3) можно считать законченной, что позволяет приступить к ее решению.

В рассматриваемой области вводится сетка с шагами dx и dy по оси x и y , и по времени t , равная dt , что означает $x = idx$, $y = jdy$, $t = kdt$. По значениям u , v и f в точках i, j, k согласно (1) можно определить значения в некоторых промежуточных точках $i + \frac{1}{2}$; $j + \frac{1}{2}$; $k + \frac{1}{2}$.

Региональная бароклинная модель атмосферы

Основу всех численных моделей атмосферы составляют уравнения движения, притока тепла, неразрывности, переноса влаги и атмосферных примесей, представляющих собой систему уравнений гидротермодинамики атмосферы. Решение этой системы уравнений было связано, в первую очередь, с развитием численных методов прогноза погоды. Оперативная служба погоды в настоящее время пользуется схемами, основанными на интегрировании полных гидродинамических уравнений атмосферных процессов.

Основные уравнения гидротермодинамики атмосферы

Для исследования атмосферных процессов эволюции поля скорости ветра, давления и температуры в бароклинной атмосфере применяется система уравнений гидродинамики и переноса тепла применительно к атмосферным процессам регионального масштаба.

Система уравнений гидротермодинамики атмосферы в системе координат x, y, z, t записывается в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu + F_y, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{w}{\xi} = \frac{E}{C_p}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -\frac{R}{\xi} T, \end{array} \right. \quad (4)$$

где u, v – горизонтальные составляющие вектора скорости ветра по осям x, y ; $\xi = p/p_0$; p – давление; $p_0 = 1000$ гПа; $W = d\xi/dt$ – аналог вертикальной скорости; R – газовая постоянная для сухого воздуха; $\Phi = g \cdot z$ – геопотенциал; g – ускорение свободного падения; T – температура; $l = 2\omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса; ω – угловая скорость вращения Земли; φ – широта; $\gamma_a = \frac{\chi - 1}{\chi} \frac{g}{R}$ – сухоадиабатический градиент; $\gamma = -\partial T / \partial z$

– вертикальный градиент температуры; F_x и F_y – проекции силы турбулентной вязкости на оси x и y ; E – приток тепла к единице массы в единицу времени. В системе (4) примем условие адиабатичности ($E = 0$) и отсутствие влияния вязкости ($F_x = F_y = 0$). В этом случае полученную систему оправданно использовать для вычисления краткосрочных изменений структуры атмосферы. При принятых допущениях система (1) из пяти уравнений содержит пять искомым величин u, v, w, Φ, T , что в принципе позволяет рассчитать их значения в любой момент времени в пределах области интегрирования при заданных начальных и граничных условиях. Система (4) включает три прогностических уравнения, содержащих производные по времени, и два диагностических. Диагностические уравнения позволяют по трем спрогнозированным функциям u, v, T определить две другие функции: w и Φ .

Начальные условия

Для решения прогностических уравнений требуется значение начальных условий, которые должны представлять собой трехмерные поля трех метеорологических величин u, v, T или u, v, Φ . Восстановление

(построение) поля метеорологического элемента по данным его измерений на нерегулярной сети станций производится методами численного (объективного) анализа. При решении данного вопроса был разработан алгоритм численного анализа данных на базе весовой анизотропной интерполяции. Значение метеоэлемента в интерполируемом узле представляется в виде

$$\varphi_0 = \sum_{v=1}^m a_v f_v / \sum_{v=1}^m a_v, \quad (5)$$

где a_v – веса, определяемые из решения следующей системы

$$\sum_{k=1}^m a_k r_{kv} = r_{ov}, \quad \text{где } v = (\overline{1, m}), \quad (6)$$

где r – расстояние.

В случае совпадения узла сетки с местоположением станции наблюдения, вычисляемое значение функции будет равно измеренному. Как и в оптимальной интерполяции, веса учитывают особенности расположения станций между собой и относительного узла.

Вторым этапом численного анализа метеорологических полей является процедура согласования интерполированных значений на основе принимаемых уравнений движения и переноса, которые накладывают определенные ограничения. В этом этапе ограничениями служат уравнения статики и геострофичности, а также уравнения баланса и бездивергентности, а также уравнения неразрывности. Наиболее часто применяемыми методами согласования являются вариационные, постановка задачи при которых сводится к следующему.

Пусть Φ^0, u^0, v^0, T^0 – исходные поля геопотенциала, горизонтальных составляющих скорости ветра и температуры соответственно, полученные в результате численного анализа. Требуется найти такие функции Φ, u, v, T , которые обеспечивают минимум функционала

$$\iiint_G [\alpha_H^2 (\Phi - \Phi^0)^2 + \alpha_V^2 (V - V^0)^2 + \alpha_T^2 (T - T^0)^2] dG \rightarrow 0 \quad (7)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad T = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad V^2 = u^2 + v^2. \quad (8)$$

Здесь $z = R \cdot \ln(p/p_0)$, $p_0 = 1000$ гПа; R – газовая постоянная; $\alpha_H, \alpha_V, \alpha_T$ – веса, придаваемые информации о геопотенциале, ветре и температуре. Вводятся следующие соотношения

$$q = \alpha_H^2 / \alpha_V^2, \quad \chi = \alpha_H^2 / \alpha_V^2.$$

Так как функционал квадратичный, а наложенные связи линейные, то задача имеет единственное решение. Приемами вариационного исчисления она сводится к решению уравнения для отклонений φ согласованного геопотенциала H от исходного H^0

$$\Delta\varphi + fl^2\varphi_{\xi\xi} - ql^2\varphi = l(v_x^0 - u_y^0) - \Delta\Phi^0 + fl^2(T_0^2 - H_{\xi\xi}^0). \quad (9)$$

Решение задачи согласования состоит из двух этапов. На первом этапе интегрируется уравнение эллиптического типа, в результате чего определяются φ и согласованный геопотенциал $\Phi = \Phi^0 + \varphi$. На втором этапе рассчитываются согласованные компоненты ветра и температуры на основе геострофических соотношений. При интегрировании указанного уравнения применяется экстраполяционный метод Либмана.

Граничные условия

Граничные условия должны отражать влияние внешней по отношению к области интегрирования среды на исследуемые процессы.

На верхней границе атмосферы, т.е. при $G = 0$ ($z \rightarrow \infty$) можно воспользоваться условием отсутствия потока массы

$$\rho W|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (10)$$

где $W = dz/dt$ – вертикальная скорость в системе x y z t .

В используемой нами изобарической системе координат для аналога вертикальной скорости ω условие на верхней границе атмосферы запишется в виде

$$\omega|_{\xi=0} = 0. \quad (11)$$

На нижней границе атмосферы при отсутствии неровностей будем иметь следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \omega RT = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (12)$$

При учете неровностей рельефа в постановке нижнего граничного условия возникают дополнительные трудности, т.е. в этом случае уровень $\xi = 0$ не совпадает с поверхностью Земли. В этом случае учитываются орграфические вертикальные точки, порождаемые обтеканием рельефа:

$$W_{0p} = u \frac{\partial\Phi_r}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi_r}{\partial y}, \quad (13)$$

где $\Phi_r(x, y)$ – геопотенциал подстилающей поверхности. При этом используется предположение, что к уровню $\xi = 1$ относятся орографические вертикальные точки. Тогда нижнее граничное условие можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} (\Phi - \Phi_r) + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} (\Phi - \Phi_r) - \omega RT = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (14)$$

При построении численных моделей атмосферы на ограниченной территории возникает сложная проблема, связанная с постановкой боковых граничных условий. Если боковые условия поставлены неправильно, то на границах и вблизи них возникают фиктивные волны с большой амплитудой, которые могут распространяться внутрь области определения решений и тем самым искажают правильное решение.

Атмосферные процессы на ограниченной территории непосредственно связаны с процессами, происходящими над другими районами. На разделяющей их границе происходят процессы, описываемые уравнениями самой модели. Следовательно, в принципе, можно рассчитывать все зависимые переменные на боковых границах, применяя направленные внутрь области конечные разности по x и y таким образом, чтобы для их вычисления требовались сеточные значения функции на границах.

В задачах термодинамики атмосферы учесть на границе стоки и втоки практически невозможно. Потому нами был применен подход с использованием так называемых буферных зон. В пределах буферных зон решается краевая задача для уравнения Лапласа с изменяющимися во времени граничными условиями. Такой способ используется в оперативной модели национального метеорологического центра США.

Процедура интегрирования

Для численного интегрирования рассматриваемой системы термодинамики атмосферы используется явная конечно-разностная схема на расщепленной сетке с дробным шагом по времени. Используя конечно-разностную аппроксимацию производных по времени и начальные сеточные значения $U_{ijk}^{t_0}$, $V_{ijk}^{t_0}$, $T_{ijk}^{t_0}$ с помощью прогностических уравнений вычисляются усредненные по пространству их значения в точках $i + \frac{1}{2}$,

$j + \frac{1}{2}$, $k + \frac{1}{2}$. На этой базе и соответствующих уравнений могут быть получены значения на дробном шаге по времени $n + \frac{1}{2}$. С помощью уравне-

ний гидростатики и непрерывности определяются значения геопотенциала и вертикальной скорости. Полученные значения могут служить начальными условиями для последующей такой же процедуры и позволяют получить значения для полного шага по времени. Реализация изложенной схемы была выполнена применительно к прогнозу барических поверхностей от 1000 гПа до 100 гПа с шагом 100 гПа. В качестве исходных данных использовались значения Φ , U , V , T из синоптических бюллетеней прошлых лет.

Обозначив любую из функций u , v и f через функцию S , можем записать в следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4}(S_{i,j,k} + S_{i+1,j,k} + S_{i,j+1,k} + S_{i,j,k+1}) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}{dt} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{S_{i+1,j,k} + S_{i+1,j+1,k} - S_{i,j,k} - S_{i,j+1,k}}{2dx} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{S_{i+1,j,k} + S_{i+1,j+1,k} - S_{i,j,k} - S_{i,j+1,k}}{2dy} \end{array} \right. \quad (15)$$

Из системы уравнений (4) с помощью соотношений (15) можно получить значения функций u , v и f для момента времени $\frac{1}{2} dt$. Полученные значения функций u , v и f в промежуточных точках могут быть использованы в качестве начальных условий при определении значений функций в узлах основной сетки i, j, k . Значения искомых функций в узлах основной сетки на дробном шаге по времени могут определяться в виде следующих выражений:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(S_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + S_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + S_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{S_{i,j,k+1} - S_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{dt} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{S_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - S_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - S_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{2dx} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + S_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - S_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - S_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{2dy} \end{array} \right. \quad (16)$$

На основании последних соотношений из системы уравнений (4) могут быть определены значения функций u , v , f в узлах основной сетки и полном шаге по времени. На каждом шаге по времени рассчитываются внутренние точки рассматриваемой области, поэтому необходимо определять значения искомых функций на границе. Лапласиан функции в конечно-разностной форме записывается в следующем виде:

$$S_{i,j,k} = \frac{1}{4} (S_{i+1,j,k} + S_{i,j+1,k} + S_{i-1,j,k} + S_{i,j-1,k}). \quad (17)$$

Из выражения (17) могут быть определены все граничные точки на каждом шаге по времени. Для практической реализации бралась сетка 153×83 точек, положенная на географическую карту территории Республики Казахстан с координатами $46,49^\circ \dots 87,31^\circ$ в.д., $40,51^\circ \dots 55,44^\circ$ с.ш. Результаты расчета приведены на рис. 1 и 2. Численный эксперимент, проведенный на изобарических поверхностях 1000 гПа, 850 гПа, 700 гПа, 500 гПа и 300 гПа, показал, что представленные численные модели могут восстанавливать нестационарные региональные атмосферные процессы для решения различных задач физики атмосферы, метеорологии и экологии.

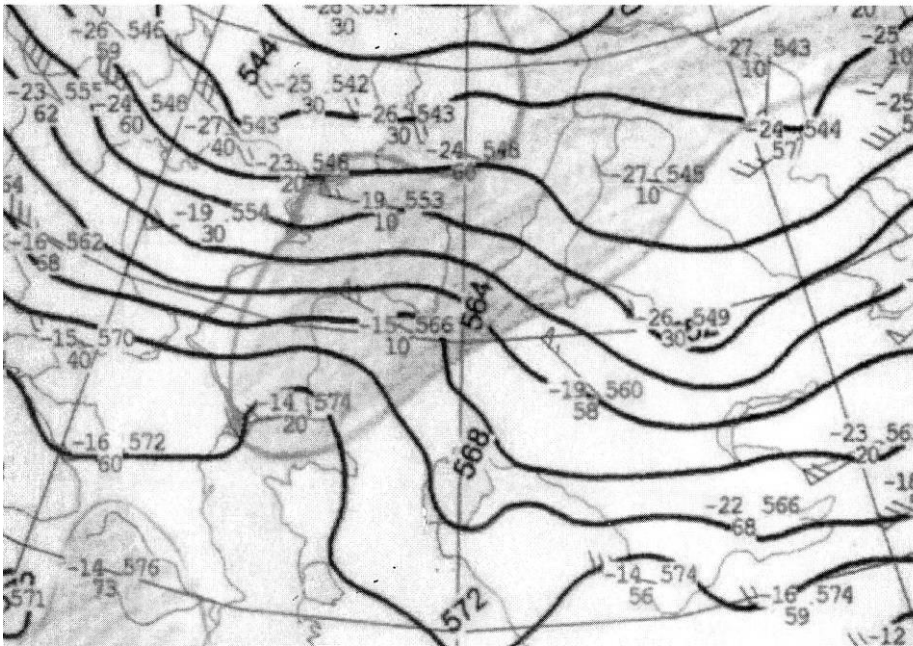


Рис. 1. Карта погоды на территории Казахстана на уровне 500 гПа 6 октября 2001 г.

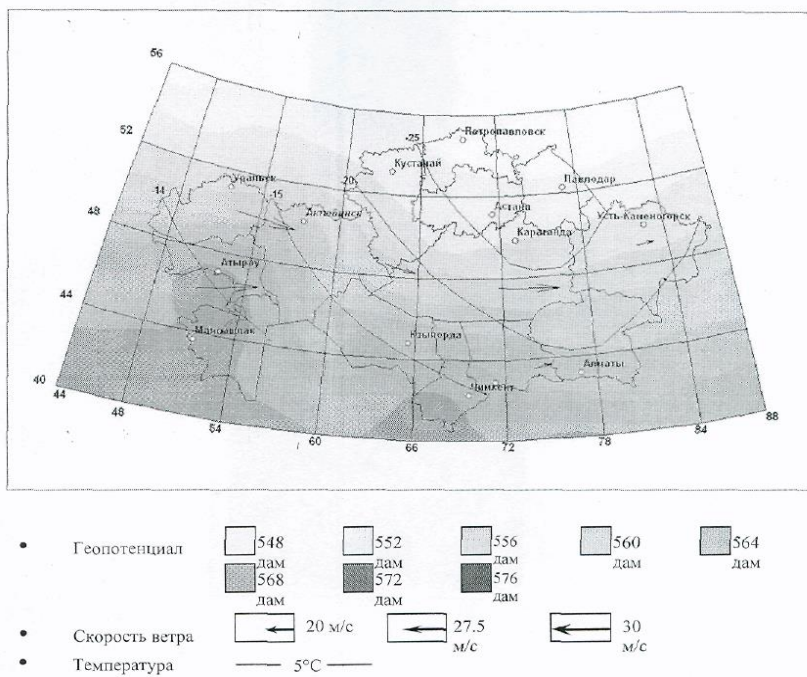


Рис. 2. Расчетный режим на уровне 500 гПа 6 октября 2001 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов П.Н. Практические методы численного прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 335 с.
2. Кибель И.А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного процесса погоды. М.: Госиздат, 1957. –375 с.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. – 320 с.
4. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 303 с.
5. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 356 с.
6. Марчук Г.И., Агошнов В.Н. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. – 414 с.
7. Марчук Г.И., Дымников В.П. и др. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984. –320 с.
8. Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики атмосферы. М.: Наука, 1969. – 184 с.
9. Томпсон Ф.Д. Анализ и предсказание погоды численными методами. М.: Изд. иллюстр., 1962. –239 с.
10. Юдин М.И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1963. – 404 с.

Институт космических исследований

АЙМАҚТЫҚ АТМОСФЕРАЛЫҚ ПРОЦЕССТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

Геогр. ғылымд. канд. А.Х. Ахмеджанов

Атмосфера физикасында, метеорологияда және экологияда белгілі бір аймақтың үстінде метеорологиялық элементтердің кеңістік бойынша таралуын білу өте маңызды, сондықтан бұл жұмыста аймақтық атмосфералық процесстердің сандық модельдері ұсынылған.