

УДК 505.55.003.572

**МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПОЧВЫ**

Канд. физ.-мат. наук Е.С. Андасбаев

В работе представлен метод определения гидрофизических характеристик, основанные на решении так называемых коэффициентных обратных задач. В этом случае по известным начальным и краевым условиям и результатам изменения влажности (или потенциала) внутри слоя почвы определяется искомая зависимость входных параметров. При этом обратные задачи позволяют получить такие зависимости в широком диапазоне изменений влажности и не требуют специальных условий проведения эксперимента.

Во многих численных моделях динамики атмосферы для нахождения температуры и влажности почвенной среды используется уравнение баланса тепла. Гидрофизические характеристики почвы разнообразны, в результате чего даже и на небольших расстояниях потоки влаги над различными типами почвы могут резко различаться и тем самым влиять на влажные процессы в нижних слоях атмосферы.

Для определения гидрофизических характеристик почвы, к основным из которых относится потенциал почвенной влаги, коэффициент влагопереноса, коэффициент фильтрации, в настоящее время используются различные экспериментальные методы. Не останавливаясь на их достоинствах и недостатках, отметим, что все они, как правило, трудоемки и требуют немало времени. Поэтому одновременно с развитием экспериментальных методов при определении характеристик почвы необходимо привлекать такие методы исследования, которые позволили бы извлечь максимальную информацию об изучаемом предмете при сравнительной простоте систем, особенно в натуральных условиях.

Перспективными здесь представляются методы определения гидрофизических характеристик, основанные на решении так называемых коэффициентных обратных задач. В этом случае по известным начальным и краевым условиям и результатам изменения влажности q (или потенциала) внутри слоя почвы определяется искомая зависимость входных параметров. При этом обратные задачи позволяют получить такие зависимости в

широком диапазоне изменений влажности q и не требуют специальных условий проведения эксперимента. Распределение количества влаги в почве q определим из уравнения:

$$\rho_w \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial Q_s}{\partial z}, \quad (1)$$

или

$$Q_s = D_q \rho_w \frac{\partial q}{\partial z} - K_q \rho_w, \quad (2)$$

$$D_q = K_q \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3)$$

где Q_s – поток влаги в почве, K_q – гидравлическая проводимость, ρ_w – плотность воды, z – вертикальная координата, D_q – коэффициент диффузии, t – время, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq z \leq H$. С учетом (2) и (3) уравнение (1) перепишем в компактной форме:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_q \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z}, \quad (4)$$

где введена величина диффузивности

$$D_q = K(q) \frac{\partial \psi}{\partial q}. \quad (5)$$

Сформулируем исходную обратную задачу. Пусть наряду с заданными краевыми условиями

$$q|_{z=0} = q_1(t) \text{ и } q|_{z=H} = q_H, \quad (6)$$

и начальным профилем

$$q|_{t=0} = q_0(z) \quad (7)$$

известны «измерения» влажности во внутренних точках

$$0 \leq z_1, z_2, \dots, z_n < H. \quad (8)$$

Опираясь на эти исходные данные (4), (6)...(8), требуется найти характеристики уравнения влагопереноса $\psi(q)$ и $K(q)$. От такой достаточно общей постановки обратной задачи перейдем к следующей. Предположим, что вид зависимостей $\psi(q)$ и $K(q)$ нам известны, т.е. известны функциональные соотношения

$$\psi = \psi(q, c_1, c_2, \dots), \quad (9)$$

$$K = K(q, s_1, s_2, \dots),$$

и необходимо определить лишь известные параметры c_j, s_j .

Введем в рассмотрение обобщенный вектор неизвестных параметров \vec{P} :

$$\vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n). \quad (10)$$

Для нахождения \vec{P} , сведем задачу к экстремальной постановке. Составим функционал качества

$$I(P) = \int_0^T \int_0^H \left[q(z, t, \vec{P}) - f_l(z, t) \right]^2 \eta(z, t) dz dt, \quad (11)$$

представляющий собой суммарное квадратичное отклонение решения уравнения влагопереноса (4) при каком-то векторе \vec{P} от заданных измерений $f_l(z, t)$. Теперь необходимо найти такой вектор \vec{P}^* , который бы минимизировал функционал качества (4), т.е. на котором $I(\vec{P})$ достигает своего наименьшего значения:

$$\inf I(\vec{P}) = I(\vec{P}^*) = I^*, \quad (12)$$

при этом будем полагать, что функция $I(\vec{P})$ является выпуклой, так что минимум у неё существует.

В приведенной постановке обратная задача сводится к задаче минимизации функции многих переменных. Для решения последней имеется множество методов оптимизации [1, 2]. Общий принцип всех их заключается в построении с помощью какого-либо итерационного алгоритма такой последовательности \vec{P}^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, что $\lim I(\vec{P}^k) = I^*$. Применительно к задаче минимизации функционала $k \rightarrow \infty$ заметим следующее. На каждой итерации для вычисления очередного приближения \vec{P}^k , требуется, очевидно, обращение к решению исходного уравнения влагопереноса (4) и, таким образом, в процессе минимизации $I(\vec{P})$ необходимо многократное решение прямой задачи. Поэтому желательно использовать методы оптимизации с высокой скоростью сходимости. Одним из наиболее эффективных среди них является получивший широкое распространение метод сопряженных градиентов [3, 4]. Кроме высокой скорости сходимости они обладают хорошей обусловленностью, т.е. слабой чувстви-

тельностью к форме поверхности функционала $I(\vec{P})$, экономичностью, простотой реализации.

Метод сопряженных градиентов заключается в построении последовательности векторов $\{\vec{P}_k\}$ по правилу

$$P^{k+1} = P^k - \beta_k S^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где S^k – так называемый вектор спуска, определяемый как

$$S^0 = U^0, \quad S^k = U^k + \xi_k S^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

здесь $U^k \equiv I'(P^k)$ – градиент целевой функции, а величина ξ_k определяется по формуле

$$\xi_k = \frac{\|U^k\|^2}{\|U^{k-1}\|^2}, \quad (15)$$

или в конечном пространстве

$$\xi_k = \frac{\langle U^k, U^k - U^{k-1} \rangle}{\|U^k\|^2}. \quad (16)$$

Выражение в фигурных скобках в числителе означает скалярное произведение. Величина β_k находится из условия

$$I(P^k - \beta_k S^k) = \min_{\beta \geq 0} I(P^k - \beta S^k), \quad (17)$$

которое является условием минимизации вдоль направления спуска S^k , поэтому величина β_k называется шагом или глубиной спуска. Отметим, что если положить в (14) все $\xi_k \equiv 0$, то метод сопряженных градиентов переходит в известный метод скорейшего спуска.

Практически найти величину β_k из условия (17) затруднительно, поэтому для нее применяют различные аппроксимации, неизбежно накапливают погрешности и они могут привести к тому, что векторы S^k перестают указывать направления убывания функционала и сходимость метода нарушается. Поэтому на практике «метод сопряженных градиентов» время от времени «обновляют», полагая в (14) $\xi_k \equiv 0$. Следует сказать, что

вопрос выбора шага спуска ξ_k является одним из центральных и во многом определяет успешную работу алгоритма сопряженных градиентов.

Для вычисления градиента функционала (11) воспользуемся методом множителя Лагранжа. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(q, \vec{P}) = I(\vec{P}) + \int_0^T \int_0^H q^*(z, t) \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial q}{\partial z} \right\} dz dt, \quad (18)$$

где $D = k(q, \vec{P}) \partial \psi(q, \vec{P}) / \partial q$, $q^*(z, t)$ – множитель Лагранжа.

Вариация функционала L имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \int_0^H 2\eta(z, t) \left[q(z, t, \vec{P}) - f_l(z, t) \right] \delta q dz dt + \\ & + \int_0^T \int_0^H q^*(z, t) \left\{ \frac{\partial \delta q}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial \delta q}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right] \delta \vec{P} \right\} dz dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Приращение $\delta \delta q$ удовлетворяет дополнительным условиям при $z = 0$:

$$D \frac{\partial \delta q}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \delta \vec{P} = 0; \text{ при } z = H: \delta q = 0, \text{ при } t = 0: \delta q = 0$$

С учетом этого преобразуем второе слагаемое в (19) с помощью интегрирования по частям. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left\{ -\frac{\partial q^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial q^*}{\partial z} \right] + 2\eta(z, t) [q - f_l] \right\} \delta q dz dt + \delta \int_0^T \int_0^H \left\{ -q^* \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \right] \right\} dz dt + \\ & \delta \vec{P} \int_0^T -q^* \frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} dt + \int_0^H q^* \delta q \Big|_{t=T} + \int_0^T q^* D \frac{\partial \delta q}{\partial z} \Big|_{z=H} + \int_0^T D \frac{\partial q^*}{\partial z} \delta q \Big|_{z=0} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая условие стационарности $\delta L = 0$, и пользуясь свободой в выборе $\delta q(z, t)$, приведем к условиям для множителей Лагранжа $q^*(z, t)$:

$$\frac{\partial q^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial q^*}{\partial z} + 2\eta(z, t) [q - f_l] = 0. \quad (21)$$

Сопряженное уравнение (21) решается при следующих начально-краевых условиях:

$$\text{при } z = 0: q^* = 0; \text{ при } z = H: q^* = 0; \text{ при } t = T: q^* = 0. \quad (22)$$

В силу соотношения (1)...(9), (21), (22) из (20) получим формулу для вычисления производной функционала (11) по параметру \vec{P} :

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{P}} = \int_0^T \int_0^H \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right] q^* dz dt + \int_0^T q^* \frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая краевые условия, находим

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{P}} = \int_0^T \int_0^H \frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial q^*}{\partial z} dz dt + 2 \int_0^T q^* \frac{\partial D}{\partial \vec{P}} \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} dt. \quad (23)$$

Таким образом, общая схема определения неизвестных параметров P заключается в следующем. Выбрав начальное приближение, далее решается прямая задача с начальными и краевыми условиями (6)...(7) и следом сопряженная задача (18) для определения множителя Лагранжа $q^*(z, t)$. Далее определяется градиент функционала (11) по параметру P . Затем с помощью алгоритма сопряженных градиентов (13)...(17) определяются следующие приближения P^1 и так далее. На практике итерации (13) продолжают до тех пор, пока не выполняется какой-либо критерий окончания счета, например $\|P^{k+1} - P^k\| \leq \varepsilon_1$ или $\|I^1(P^{k+1})\| \leq \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – заданные числа. Надо сказать, что к различным условиям окончания счета следует относиться критически, поскольку они могут выполняться и вдали от искомой точки минимума. В нашем случае в качестве нужного критерия имеет смысл взять условие

$$\|I(P^{k+1})\| \leq \delta, \quad (24)$$

где δ – точность вычисления функционала I , которая должна быть связана с той точностью, с какой заданы соответствующие измерения $f_1(t)$. Так, если ошибка измерения $f_1(t)$ есть $\lambda_s(t)$ в качестве δ можно взять величину

$$\delta = \sum_{l=1}^L \int_0^T \lambda_l^2(t) dt. \quad (25)$$

При использовании описанной модели выполнен ряд методических численных экспериментов с целью уточнения параметров описанной модели. В качестве исходных данных выбраны зависимости [5]:

$$(q) = \psi_0 (q_0 \cdot q^{-1})^C, \quad D(q) = D_0 (q \cdot \Pi)^S, \quad (26)$$

где D_0 – коэффициент фильтрации, Π – пористость почвы, ψ_0, q_0 – реперное значение потенциала и соответствующее ему значение влажности.

Рассмотрим почву со следующими гидрофизическими характеристиками:

$$\psi_0 = -1350 \text{ Дж/кг}, \quad D_0 = 0,32 \text{ см/ч}, \quad q_0 = 0,207 \text{ (долей объема)},$$

$$c = 6,78, \quad s = 16,06, \quad p_w = 1,2 \text{ г/см}^3.$$

Все параметры взяты из экспериментальных данных. При решении задачи толщина слоя почвы была равна $H = 70$ см, общий промежуток времени $T = 24$ ч. В качестве начального профиля $q(z)$ равновесный, на нижней границе $z = H$ задавалось постоянное значение влажности $q(H, t) = \text{const}$, на поверхности почвы задавался ход влажности

$$q(0, t) = (59 + 22 \cos \alpha + 11 \sin \alpha - 3 \cos 2\alpha + 4 \sin \alpha) / 100, \quad \alpha = \pi(t - 4) / 12.$$

Пусть на двух уровнях $z_1 = 15$ см и $z_2 = 25$ см нам известны временные зависимости влажности $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (они получены первоначально из уравнения влагопереноса при указанных выше входных данных и изображены на рис. 1 (*a, б, в* сплошными линиями)). Будем теперь считать, что из определяющих зависимости (26) параметров нам неизвестны оба (C и S) показателя степени. Необходимо определить их, опираясь на измерения f_1 и f_2 . Решения уравнения (14) осуществлялось на основе консервативной неявной разностной схемой. Шаг интегрирования по времени брался равным 10 мин, а шаг по координате 2 см. Учитывая нелинейность задачи, при решении (14) проводили также итерацию по коэффициентам. Сопряженная задача (14) решалась в обратном направлении по времени. В алгоритме минимизации функционала (21) для нахождения вектора спуска (11) величина ξ_k вычислялась по формуле (16). Для нахождения шага спуска β_k на каждой итерации метода выбирался определенный начальный шаг и затем, двигаясь вдоль направления спуска, проверялось условие монотонности функционала $F(\beta) = I(P - \beta_k s^k)$, так что в результате приближенно находились $\text{in}F(\beta)$ и соответствующее значение β_k .

Восстановление входных параметров C и S проводилось для различных начальных приближений C_0 и S_0 , причем последние выбирались достаточно далекими от реальных значений. Численные эксперименты показали, что используемый метод восстановления обладает быстрой сходимостью и устойчивостью от выбора начального приближения параметров модели.

При минимизации функционала качества (11) представляет интерес, какова форма ее поверхности для данной конкретной задачи. Были проделаны необходимые численные расчеты функционала $I(P)$ на плоскости (C, S) . На рис. 2 представлена карта изолинии функционала

$I(P)$, $P = (C, S)$, содержащая точку минимума. Как ожидалось, что функционал качества (11) не является выпуклой во всей плоскости (C, S) , а выпуклой малой области, содержащей точку минимума. Этот признак говорит о том, что задача более широкой области плохо обусловлена. Отметим, что метод сопряженных градиентов позволил успешно решить задачу оптимизации входных параметров.

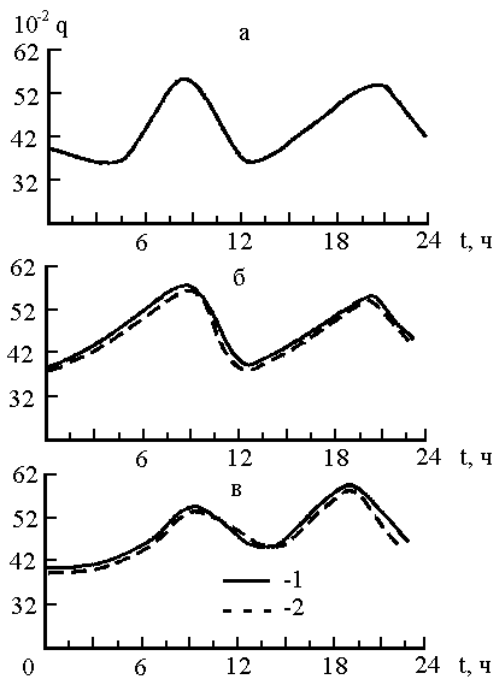


Рис. 1. Краевые условия при $z = 0$ (а) и динамика влажности на глубине $z_1 = 15$ см (б) и глубине $z_2 = 25$ см (в). Заданные «изменения»: 1 – $C = 6,78$, $S = 16,06$; 2 – $C = 18,2$, $S = 9,5$.

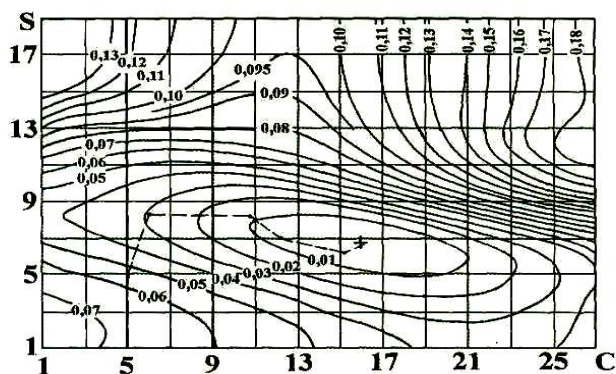


Рис. 2. Изолинии функционала качества на плоскости (C, S) , знаком «+» отмечена точка минимума.

При численном решении задач, уточнении данных модели одним из важных моментов является оценка чувствительности основных функций состояния к вариациям входных параметров. Поэтому возникает необходимость в разработке специальных способов оценки вариаций решений или функционала качества от решений, в зависимости от вариаций параметров и предсказания поведения модели в окрестности известного состояния при наличии возмущения. Такие возможности вышеизложенного алгоритма представляет формула (23), характеризующая скорость изменения функционала $I(P)$ в направлении соответствующих компонентов вектора $P = (C, S)$. В данном случае оказалось, что уравнение (4) не столь чувствительно к вариациям параметров C, S как это можно было ожидать. Следовательно, при решении задач диффузии влаги и использования для потенциала $\psi(q)$ и коэффициента $D(q)$ в выражении (26) показатели степеней C и S можно в известных пределах варьировать, причем параметр S – в большей мере.

Изложенный метод можно использовать не только для определения параметров модели, но и для нахождения функциональных зависимостей гидрофизических характеристик почвы $\psi(q)$ и $D(q)$. Например, искомую зависимость $\psi(q)$ можно представить в виде разложения

$$\psi(q) = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j(q), \quad (27)$$

где Φ_j – полный набор базисных функций, так что в этом случае задача сводится к определению параметров c_j .

Применение этого метода к более сложным системам уравнений, рассмотрение областей со сложными конфигурациями и пространственным расположением измерительных систем приводят к возможному введению нерегулярной сетки. Необходимость пространственно-временной интерполяции данных расчета на множестве точек, где проводятся наблюдения, усложняют процедуру решения основной и сопряженной задач.

В заключении отметим, что выполненный численный пример указывает на принципиальную возможность использования модели усвоения данных наблюдений с целью восстановления пространственно-временной структуры метеоэлементов рассматриваемого объема, что позволит в достаточной мере провести анализ развития отдельных динамических структурных образований, оценить изменчивость динамических процессов в различных пространственно-временных масштабах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдула Ж., Асилбеков А., Сатаев Б.О. Математические модели для прогнозирования состояния окружающей среды // Механика и моделирование процессов технологий. – Тараз, 2005. – №2. – С. 309-315.
2. Абдула Ж., Мамытбеков Е., Асилбеков А., Сатаев Б.О. Модельное исследование радиационного загрязнения атмосферного воздуха уранодобывающей промышленностью // Механика и моделирование процессов технологий. Тараз, 2006. – №1. – С. 135-139.
3. Айдосов А.А., Дюсенова Ж.А., Айдосов Г.А., Кожаметов С.Н. Исследование состояния воздушного бассейна с учетом взаимодействия природно-климатических условий и техногенных факторов // Труды 7-ой Международной научно-практической конференции. – Алматы, Т. II. – 2005. – С. 283-289.
4. Айдосов А.А., Дюсенова Ж.А., Айдосов Г.А., Кожаметов С.Н. Моделирование процесса распространения активных примесей в нижнем слое атмосферы // Труды 7-ой Международной научно-практической конференции. – Алматы, том II. – 2005. – С. 315-320.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 321 с.

Жетысуский государственный университет им. Жансугурова, г. Талдыкорган

ТОПЫРАҚТЫҢ ГИДРОФИЗИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН АНЫҚТАУ ӘДІСІ

Физ.-мат. ғылымд. канд. Е.С. Андасбаев

Қазіргі кезде топырақтың гидрофизикалық сипаттамасын анықтауға арналған әртүрлі эксперименттік әдістер қолданылады. Мұнда гидрофизикалық сипаттамаларды анықтайтын кері есептеу коэффициенті әдісінің болашағы үлкен. Бұл жұмыста топырақтың ішкі қабатындағы ылғалдылықтың өзгеру нәтижесі белгілі бастапқы және шектік шарттармен кіріс параметрлердің ізделіп отырған тәуелділігі арқылы анықталады. Сонымен қатар кері есептеу ылғалдылық өзгерісінің кең диапазонында ізделінген тәуелділік арқылы анықталынып, эксперимент жүргізу үшін арнайы шарттарды қажет етпейді.