Гидрометеорология и экология
№ 4 2010

УДК 551.515:532.5.18

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ПЕРЕНОСИМОГО ВЕТРОМ ПЕСКА ПО ВЫСОТЕ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ВОЗДУХА

Канд. техн. наук И.Г. Гуршев
Канд. физ.-мат. наук О.Е. Семёнов

Приводится решение уравнения турбулентной диффузии тяжелой примеси для определения вертикального профиля концентрации песка в ветропесчаном потоке. Полученная функция для его описания в пограничном слое ветропесчаного потока $C(z) = Az^b \exp(-\alpha z)$ *переходит, при выполнении определенных условиях, в известный профиль для концентрации примеси в приземном слое атмосферы при пыльных бурях Баренблатта-Голицына* $C(z) = C_1 (z/z_1)^{-\beta}$.

Для простоты решение поставленной задачи рассмотрим для стационарного плоского потока в двухмерной системе координат, в которой ось ОХ имеет положительное направление по направлению вектора скорости ветра и проходит по песчаной поверхности. Вертикальная ось OZ направлена вверх от поверхности частиц песка. Ось ОУ перпендикулярна осям ОХ и OZ. Начало системы координат находится на поверхности верхнего слоя частиц.

В работах [5, 6] экспериментально показано существование двух различных зависимостей для описания вертикального распределения массовой концентрации $C(z)$ частиц песка в пограничном слое ветропесчаного потока. В слое воздуха до некоторой высоты z_1 вертикальное распределение концентрации песка описывается функцией

$$C(z) = Az^b \exp(-\alpha z),$$

причем A, b, α – определяются параметрами ветропесчаного потока, z – координата. Выше этого слоя концентрация песка аппроксимируется степенной функцией

$$C(z) = C_1 (z/z_1)^{-\beta},$$

где C_1 – концентрация песка на высоте z_1, β –функция отношения $\dfrac{w_g}{u_*}$, где w_g – скорость гравитационного падения частиц песка, u_* – динамическая скорость [1, 3, 5, 6].

Пульсации давления над песчаной поверхностью создают вертикальные потоки воздуха с начальной постоянной скоростью w_0, не зависящей от координат $x,\ z$.

В дальнейшем предполагаем, что изменение вертикальной скорости таких потоков происходит по зависимости

$$w = w_0 - C_2 z = w_0 - C_2 x_0 \frac{z}{x_0} = w_0 - C_2 x_0 \tilde{z}\ , \tag{1}$$

где C_2 – постоянная с размерностью, обратной времени; x_0 – средний геометрический размер частиц песка на поверхности [6], z – координата по оси OZ; $\tilde{z}$ – безразмерная координата.

Из зависимости (1) вытекает, что такое распределение скорости потока воздуха действует в слое определенной высоты. Высота слоя воздуха $\tilde{z}_1$, в котором выполняется предложенное равенство (1), определяется условием $w = 0$, из которого находим $\tilde{z}_1 = \dfrac{w_0}{C_2 x_0}$. Это согласуется с экспериментально обнаруженным существованием слоев ветропесчаного потока с различными закономерностями распределения концентрации песка по вертикали [5, 6].

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением турбулентной диффузии, записанного для плоскости $X\ O\ Z$ [3]

$$u\frac{\partial C}{\partial x} + \left(w - w_g\right)\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_c \frac{\partial C}{\partial z}\right), \tag{2}$$

где $u,\ w$ – компоненты скорости ветра вдоль координатных осей OX, OZ; w_g – скорость гравитационного падения частиц песка; C – массовая концентрация тяжелой примеси; K_c – коэффициент турбулентности для примеси; z – координата.

Так как скорость w_g зависит от размера частиц песка [6], а не от координат, то слагаемые в левой части уравнения (2) можно представить следующим образом

$$u\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial uC}{\partial x}-C\frac{\partial u}{\partial x}\,, \tag{3}$$

$$\left(w-w_g\right)\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(w-w_g\right)C-C\frac{\partial\left(w-w_g\right)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(w-w_g\right)C-C\frac{\partial w}{\partial z}\,. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (2) имеет вид

$$\frac{\partial uC}{\partial x}+\frac{\partial\left(w-w_g\right)C}{\partial z}-C\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_c\frac{\partial C}{\partial z}\right). \tag{5}$$

.Для дальнейших рассуждений используем уравнение неразрывности среды. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, которое при $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, преобразуется в равенство $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$. Таким образом, мы получаем в уравнении (5) в третьем слагаемом один из множителей равным 0, т.е. все третье слагаемое в левой части равенства (5) равно 0.

Как следует из уравнения (2) величина С является функцией координат x и z. В проекции уравнения (5) на ось OZ произведение u(x,z)C(x,z) в уравнении (5), ввиду того, что измерения проводятся в начале системы координат (x=0) и вдоль оси OZ, становится таким: uC=u(0,z)C(0,z). Следовательно произведение является функцией координаты z. Тогда $\frac{\partial u\,C}{\partial x}=0$ в силу независимости координат x и z.

В итоге получаем следующее равенство

$$\frac{d\left(w-w_g\right)C}{dz}=\frac{d}{dz}\left(K_c\frac{dC}{dz}\right). \tag{6}$$

После интегрирования уравнения (6) имеем такие равенства

$$\left(w-w_g\right)C=K_c\frac{dC}{dz}+C_3,$$

$$\frac{dC}{dz}-\frac{\left(w-w_g\right)}{K_c}C+\frac{C_3}{K_c}=0\,, \tag{7}$$

где C_3 – постоянная интегрирования.

Уравнение (7) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение известно [2]. В нашем случае будем искать частное решение уравнения (7), которое можно определить, если принять $C_3 = 0$, т.е. будем решать следующее уравнение

$$\frac{dC}{dz} - \frac{\left(w - w_g\right)}{K_c} C = 0, \tag{8}$$

при выполнении граничных условий: $z = 0$, $C = 0$.

В соответствии с работой [6] вводим безразмерные координаты $\tilde{z} = z/x_0$, $\tilde{C} = C/C_m$, при этом C_m наибольшая концентрация частиц песка на некоторой высоте z. Необходимо также иметь в виду, что величина C_m принимается постоянной. Однако необходимо отметить, что C_m может зависеть от многих других переменных, а не только от координат.

Использование безразмерных координат позволяет преобразовать уравнение (8) и получить такие выражения

$$\frac{C_m d\tilde{C}}{x_0 d\tilde{z}} - \frac{\left(w - w_g\right)}{K_c} C_m \cdot \tilde{C} = 0,$$

$$\frac{d\tilde{C}}{x_0 d\tilde{z}} - \frac{\left(w - w_g\right) \cdot \tilde{C}}{K_c} = 0. \tag{9}$$

При выводе уравнения (9) было учтено, что $C_m \neq 0$.

Относительно коэффициента турбулентной диффузии для примеси K_c считаем, что эта величина пропорциональна коэффициенту турбулентной диффузии для количества движения K воздушного потока, т.е. $K_c = bK$ (b – безразмерная постоянная). Известно, что в приземном слое воздуха величина K является линейной функцией координаты z.

$$K = \kappa \cdot u_* \cdot z = \kappa \cdot u_* \cdot x_0 \cdot \tilde{z},$$

где $\kappa = 0{,}4$ – постоянная Кармана, u_* – динамическая скорость.

Используя предположение (1) находим равенства

$$\frac{w - w_g}{K_c} = \frac{w_0 - w_g}{b \kappa u_* x_0 \tilde{z}} - \frac{C_2}{b \kappa u_*}, \tag{10}$$

$$\frac{d\tilde{C}}{\tilde{C}} = \left(\frac{w_0 - w_g}{b \kappa u_* \tilde{z}} - \frac{C_2 x_0}{b \kappa u_*} \right) d\tilde{z}. \tag{11}$$

Из имеющихся постоянных можно составить постоянную величину, имеющую размерность, обратную времени, т.е. величину

w_g / x_0. Допустим, что постоянная C_2 пропорциональна w_g / x_0, т.е. $C_2 = A_1 \dfrac{w_g}{x_0}$ (A_1 – безразмерная постоянная). Введем обозначения для групп постоянных, т.е.

$$B = \frac{w_0 - w_g}{b\kappa u_*}, \quad D = \frac{C_2 x_0}{b\kappa u_*} = \frac{A_1 w_g x_0}{b x_0 \kappa u_*} = E \frac{w_g}{u_*}, \quad E = \frac{A_1}{b\kappa},$$

так как считаем величину динамической скорости u_* постоянной для данных метеорологических условий.

Величину B можно представить так: $B = N \dfrac{w_g}{u_*}$, $N = \dfrac{(w_0/w_g) - 1}{b\kappa}$.

Отметим, что постоянные B и D являются так же безразмерными. Значит уравнение (11) преобразуется к такому виду

$$\frac{d\tilde{C}}{\tilde{C}} = \left(\frac{B}{\tilde{z}} - \frac{E w_g}{u_*} \right) d\tilde{z}. \tag{12}$$

Интегрирование уравнения (12) дает зависимость

$$\ln \tilde{C} = B \ln \tilde{z} - \frac{E w_g}{u_*} \tilde{z} + C_4, \tag{13}$$

где C_4 постоянная интегрирования.

Выбираем её в виде $C_4 = \ln C_5$ и получаем такие соотношения

$$\ln \frac{\tilde{C}}{C_5} = \ln \tilde{z}^B - \frac{E w_g}{u_*} \tilde{z},$$

$$\tilde{C} = C_5 \tilde{z}^B \exp\left(- \frac{E w_g}{u_*} \tilde{z} \right),$$

$$C = C_5 C_m \left(\frac{z}{x_0} \right)^B \exp\left(- E \frac{w_g}{u_*} \cdot \frac{z}{x_0} \right),$$

$$\tilde{C} = C_5 C_m \left(\frac{z}{x_0} \right)^{\frac{N w_g}{u_*}} \exp\left(- E \frac{w_g}{u_*} \cdot \frac{z}{x_0} \right). \tag{14}$$

Полученная зависимость (14) удовлетворяет вышеупомянутым граничным условиям. Найденная формула (14) по структуре выражения совпадает с экспериментально обнаруженными распределениями концентрации песка по вертикали в пограничном слое ветропесчаного потока в аэродинамической трубе и в полевых условиях [5, 6].

Рассмотрим следствие, вытекающее из зависимости (14). При полном отсутствии вертикальных воздушных потоков в условиях нейтральной стратификации атмосферы имеем $w = 0$, подавлении вертикальных воздушных потоков в приповерхностном слое воздуха имеем $w = 0$, $w_0 = 0$, $A_1 = 0$. Применение этих условий к формуле (14) дает $B = -\dfrac{w_g}{b\kappa u_*}$, $E = 0$. В этом случае зависимость (14) становится такой

$$C = C_5 C_m \left(\frac{z}{x_0}\right)^{-\frac{w_g}{b\kappa u_*}}. \qquad (15)$$

Для высоты z_1 зависимость (15) будет иметь следующий вид

$$C_1 = C_5 C_m \left(\frac{z_1}{x_0}\right)^{-\frac{w_g}{b\kappa u_*}}. \qquad (16)$$

Поделив равенство (15) на равенство (16), получим

$$\frac{C}{C_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{-\frac{w_g}{b\kappa u_*}}, \qquad (17)$$

где C_1 – концентрация песка на высоте z_1.

Таким образом, зависимость (14) переходит в степенную функцию (17). В заключение отметим, что зависимость (17) имеет достаточное теоретическое обоснование [1, 4, 7]. Следовательно, в приземном слое атмосферы во время песчаной бури могут существовать два слоя воздушнопесчаного потока с различными вертикальными распределениями концентрации песка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Голицын Г.С. Локальная структура развитых пыльных бурь. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 44 с.
2. Бронштейн И.М., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981. 720 с.
3. Гидрометеорологические проблемы Приаралья / Под ред. Г.Н. Чичасова. – Л. Гидрометеоиздат, 1990. - 277 с.

4. Прандтль Л. Гидроаэродинамика. –2-е изд. Пер. с нем. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 575 с.
5. Семенов О.Е. О массовой концентрации частиц песка в пограничном слое ветропесчаного потока // Гидрометеорология и экология. – 2009. – №2. – С. 7-27.
6. Семенов О.Е. О физическом содержании параметров профилей массовой концентрации частиц в пограничном слое ветропесчаного потока // Гидрометеорология и экология. – 2010. – №1. – С. 11-21.
7. Barenblatt G.I., Golitsyn G.S. Loca1 structure of Matyre Dust Storms // J. of the Atmospheric Sciences.- 1974 - Vol. 31, № 7. - P. 1917 - 1933.

КазНИИЭК, г. Алматы

ЖЕР БЕТІНДЕГІ АУА ҚАБАТЫ БИІТІГІНДЕ ЖЕЛМЕН АУЫСАТЫН ҚҰМ КОНЦЕНТРАЦИЯСЫН БӨЛШЕКТЕУ МАҚСАТЫН ШЕШУ

Физ.-мат. ғылымд. канд. И.Г. Гуршев
Физ.-мат. ғылымд. канд. О.Е. Семенов

Құмдыжел ағынындағы құм концентрациясының тік профилін анықтауға арналған ауыр қоспалардың турбулентті диффузиясы теңдеуінің шешімі келтірілген. Құмдыжел ағынының шекаралық қабатындағы оны сипаттау үшін алынған функциясы $C(z) = Az^b \exp(-\alpha z)$ *белгілі бір жағдайды орындағанда Баренблатта-Голицынның шаңды дауылындағы жер беті ауа қабатындағы қоспалар концентрасиясының белгілі профиліне ауысады* $C(z) = C_1 (z/z_1)^{-\beta}$.